De Stellingen van PAPPUS, DESARGUES en PASCAL

Aanvulling bij het diktaat
Geschiedenis van de wiskunde

H.J.M. Bos

Utrecht 1982

DE STELLINGEN VAN PAPPUS, DESARGUES EN PASCAL

1. Inleiding

De stellingen van Pappus, Desargues en Pascal hebben een centrale plaats in de moderne projektieve meetkunde. Ze zijn alledrie veel ouder dan die moderne projektieve meetkunde, die pas in de 19e en 20e eeuw de vorm kreeg waarin hij nu bekend is. De stellingen hebben dus pas heel lang na hun ontstaan de kontekst gekregen waarin hun belang blijkt. Dat belang is dan ook laat onderkend door wiskundigen; de stellingen zijn zelfs gedurende zekere tijd vergeten geweest of onbekend gebleven. Verder is over de kontekst waarbinnen de stellingen voor het eerst zijn gevonden veel onbekend en zelfs raadselachtig. In dit hoofdstuk zal iets meer over het ontstaan van de stellingen verteld worden.

2. De moderne vorm van de stellingen van Pappus, Desargues en Pascal

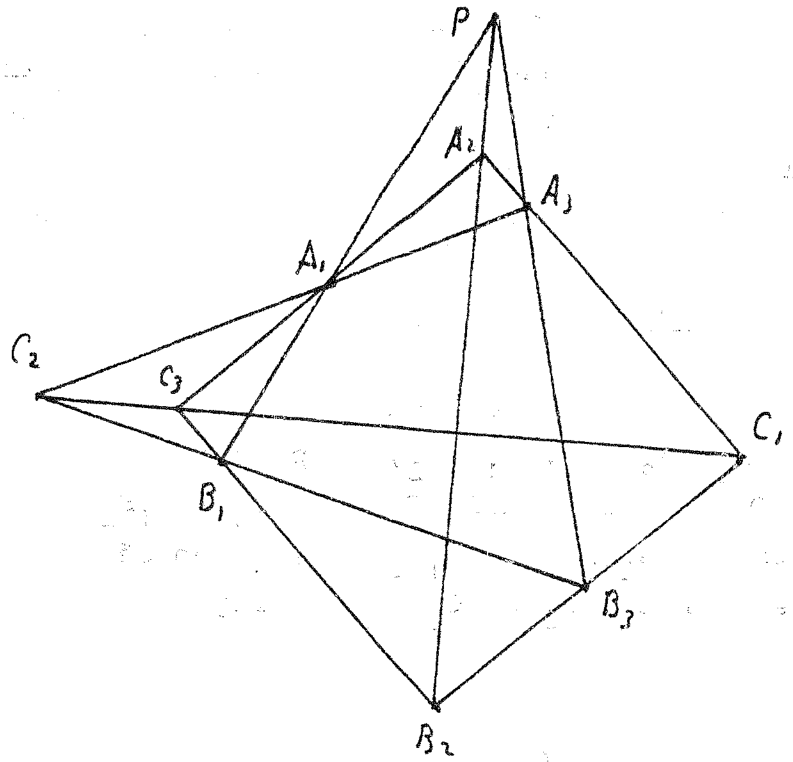
Ik gebruik hier notaties zoals die voorkomen in het diktaat Klassieke projectieve meetkunde van G.J. Schellekens [1981] (jaartallen tussen rechte haken verwijzen naar de bibliografie aan het eind van dit hoofdstuk). In het bijzonder:
$\mathcal{P}$ is een projektief vlak.
Punten in $\mathcal{P}$ worden aangegeven met hoofdletters, lijnen met kleine letters.
AB is de lijn door de punten A en B; $l \cap m$ is het snijpunt van l en m. (dit laatste in afwijking van het diktaat).
$\mathbb{P}_2(K)$ is het projektieve vlak over het lichaam K.
Punten op één lijn heten "kollineair"; rechten door één punt heten "konkurrent".
$\mathring{A}$ is de verzameling (of "waaier") van lijnen door A; $\mathring{l}$ is de verzameling (of "puntenrij") van punten op l.
In $\mathcal{P}$ gelden de volgende axioma's:
(A) : Ieder tweetal punten heeft precies één verbindingslijn.
(A*): Ieder tweetal lijnen heeft precies één snijpunt.
(Q) : Er zijn vier punten in algemene ligging.

De stelling van Desargues

De stelling van Desargues luidt:

(D): Ieder tweetal driehoeken dat puntperspektief is, is ook lijnperspektief.

Dit betekent: Laten A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 punten van P zijn; lat $C_1 = A_2A_3 \cap B_2B_3$, $C_2 = A_1A_3 \cap B_1B_3$ en $C_3 = A_1A_2 \cap B_1B_2$. Dan geldt: Als A_1B_1, A_2B_2 en A_3B_3 door één punt P gaan (d.w.z. als de driehoeken $A_1A_2A_3$ en $B_1B_2B_3$ puntperspektief zijn uit P), dan liggen C_1, C_2 en C_3 op één rechte (d.w.z. de driehoeken zijn lijnperspektief).



Men kan de stelling ook als sluitstelling voor 10 punten formuleren:

(D_{sl}): Als voor 10 punten A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 en P geldt dat de volgende 9 drietallen kollineair zijn: $C_1A_2A_3$, $C_1B_2B_3$, $C_2A_1A_3$, $C_2B_1B_3$, $C_3A_1A_2$, $C_3B_1B_2$, PA_1B_1, PA_2B_2, PA_3B_3, dan is ook het (10e) drietal $C_1C_2C_3$ kollineair.

(Het 10e drietal bevat die drie punten die elk slechts tweemaal in de negen gegeven kollineaire drietallen voorkomen; alle overige punten komen driemaal voor.)

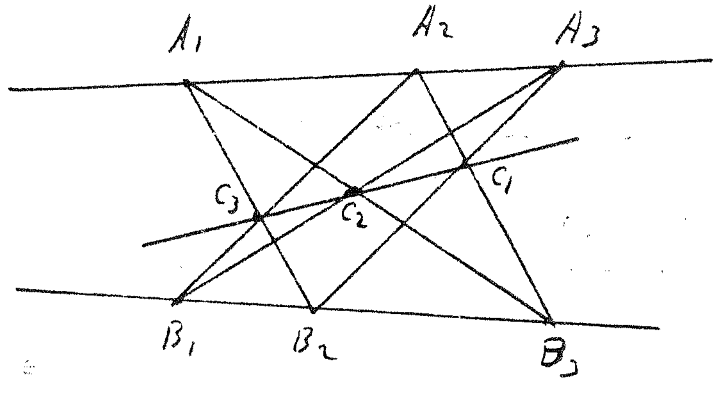
De stelling van Desargues kan uit de axioma's A, A* en Q niet bewezen worden: er zijn projektieve vlakken waarin de stelling niet geldt. Men kan bewijzen dat de stelling wel geldt in een projektief vlak dat deelruimte is van een hoger dimensionale projektieve ruimte.

In de axiomatische opbouw van de projektieve meetkunde kan met de stelling van Desargues als nieuw axioma aan de axioma's A, A* en Q toevoegen. De vlakken die aan A, A*, Q en D voldoen heten "Desargues'e" vlakken. Men kan nu bewijzen dat zulke vlakken te koördinatiseren zijn met scheve lichamen. Precieser: als P een Desargues' projektief vlak is dan is er een scheef lichaam K zó dat $P \cong \mathbb{P}_2(K)$. (Een scheef lichaam is een lichaam waarin de vermenigvuldiging niet noodzakelijk kommutatief is.) Dit laatste maakt de centrale plaats van de stelling van Desargues in de meetkunde duidelijk: de stelling legt het verband tussen de synthetische opbouw van de meetkunde (vanuit axioma's) en de analytische opbouw met behulp van koördinatisering.

De stelling van Pappus

De stelling van Pappus luidt:

(Pp): Laten A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 punten van P zijn. Laat $C_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$, $C_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1$, $C_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1$. Als de drietallen $A_1A_2A_3$ en $B_1B_2B_3$ ieder op één lijn liggen dan liggen ook C_1, C_2 en C_3 op één lijn.



Formulering als sluitstelling voor 9 punten:

(Pp_{sl}): Als van 9 punten A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 de volgende acht drietallen kollineair zijn:

$A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1A_2B_3$, $C_1A_3B_2$, $C_2A_1B_3$, $C_2A_3B_1$, $C_3A_1B_2$, $C_3A_2B_1$, dan is ook $C_1C_2C_3$ kollineair.

De stelling van Pappus kan niet uit de axioma's A, A*, Q en D afgeleid worden; er zijn Desargues'e projektieve vlakken waarin de stelling van Pappus niet geldt. Omgekeerd volgt uit de stelling van Pappus (met de axioma's A, A* en Q) wel de stelling van Desargues. Verder is de stelling van Pappus equivalent met het "axioma van Veblen" dat uitspreekt dat een perspektiviteit die drie punten op een lijn vast laat op die lijn de identiteit is. Dit axioma is weer equivalent met de zogenaamde "grondstelling" die zegt dat een perspektiviteit volledig bepaald is als van drie punten de beelden vastliggen. Deze equivalenties tonen al het belang van de stelling van Pappus; dat belang ligt verder ook in de relatie tussen axiomatische en analytische opbouw der meetkunde, men kan namelijk bewijzen dat wanneer in P de stelling van Pappus geldt, P isomorf is met $\mathbb{P}_2(K)$ waarbij K een kommutatief lichaam is. (Vergelijk Schellekens [1981] pp. 62-66)

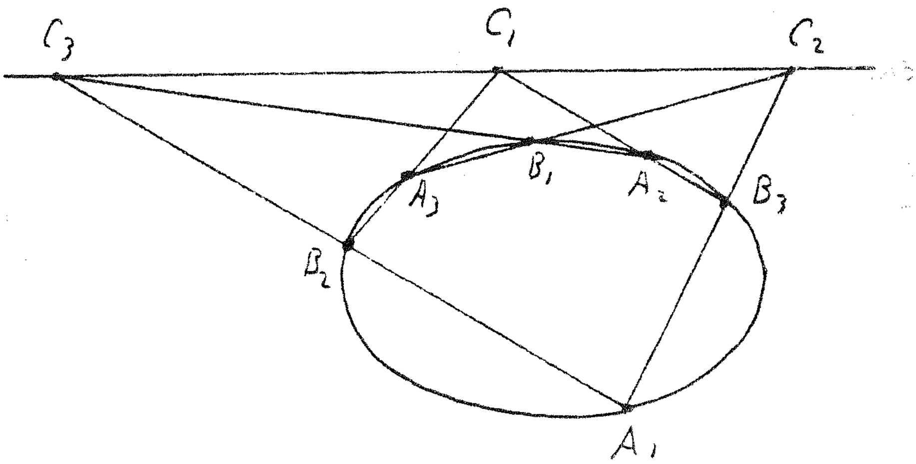
De stelling van Pascal

De stelling van Pascal betreft kegelsneden en luidt als volgt:

(P1): De hoekpunten van een zeshoek liggen dan en slechts dan op een kegelsnede als de snijpunten der overstaande zijden op één rechte liggen.

In de formulering als bij de voorgaande stellingen:

laten A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 punten van P zijn en laat $C_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$, $C_2 = A_1B_3 \quad A_3B_1$, $C_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1$. Er geldt: A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 liggen op één kegelsnede dan en slechts dan als C_1, C_2 en C_3 op één rechte liggen.



Zie de figuur; de zeshoek is $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$, overstaande zijden zijn dus A_1B_2 en A_2B_1, A_3B_2 en A_2B_3, A_1B_3 en A_3B_1.

De stelling van Pappus is een bijzonder geval van de stelling van Pascal; de twee lijnen $A_1A_2A_3$ en $B_1B_2B_3$ die optreden in de stelling van Pappus vormen namelijk een (ontaarde) kegelsnede waarop de stelling van Pascal toepasbaar is. De stelling van Pascal is belangrijk in de projektieve theorie van kegelsneden; het is een van de eerste stellingen die men afleidt uit de projektieve definitie van kegelsneden, en men kan met behulp van de stelling punten op kegelsneden bepalen als vijf gegevens over die kegelsnede bekend zijn (bijvoorbeeld vijf punten erop, of vier punten en een raaklijn etc.).

De duale stellingen

Duale stellingen ontstaan in de projektieve meetkunde door in een bestaande stelling "punten" te vervangen door "lijnen" en "lijnen" door "punten", en de stelling verder aan te passen, bij voorbeeld door "konkurrent" te verwisselen met "kollineair". De duale stelling van Desargues (D*) is dus een stelling over 10 lijnen waarvan 9 drietallen konkurrent zijn; de stelling zegt dan dat ook het 10e drietal konkurrent is. In termen van perspektieve driehoeken luidt de stelling:

(D*): Ieder tweetal driehoeken dat lijnperpektief is, is ook puntperspektief.

We hebben hier dus een geval waar de duale stelling ook de omkering is van de oorspronkelijke stelling. D* kan bewezen worden uit D (en de axioma's A, A^* en Q). Zoals we zullen zien heeft Desargues zelf dat al onderkend.

De duale van de stelling van Pascal luidt als volgt: *L Sc*

(Pl*) De zes zijden van een zeshoek raken dan en slechts dan aan één kegelsnede als de drie diagonalen door één punt gaan.

Bij deze dualisering is gebruik gemaakt van het feit dat de duale van een puntkegelsnede, dus een lijnkegelsnede, bestaat uit raaklijnen aan een puntkegelsnede. De duale van de stelling van Pascal wordt de "stelling van Brianchon" genoemd, naar C.-J. Brianchon (1783-1864) die hem in 1806 publiceerde.

Het oneindige

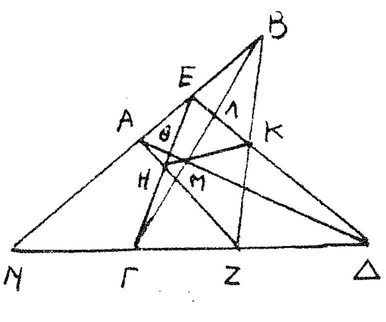
In de stellingen van Pappus, Desargues en Pascal treden drietallen lijnen op die door één punt gaan. In de "gewone" meetkunde treden naast lijnen die elkaar snijden ook evenwijdige lijnen op. Om de stellingen van Pappus, Pascal en Desargues in de gewone meetkunde te formuleren en te bewijzen moet men dus de gevallen waarin zekere drietallen lijnen evenwijdig zijn apart formuleren. Het is de kracht van de projektieve aanpak van de meetkunde (waarbij de "gewone" meetkunde uitgebreid wordt met punten "in het oneindig" zodat evenwijdige lijnen snijpunten "in het oneindige" hebben) dat daarmee een algemene formulering van stellingen als die van Pappus, Desargues en Pascal mogelijk wordt. We zullen zien dat in de ontstaansgeschiedenis van de stellingen dit inzicht van vereenvoudiging door invoering van punten in het oneindig een belangrijke rol speelde.

3. De stelling van Pappus

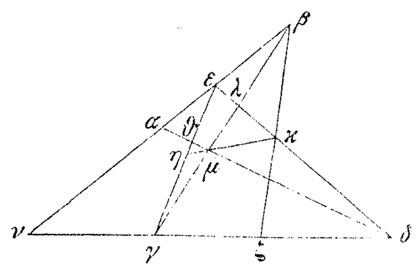
Pappus van Alexandrië (fl. ca. 325 n. C.) schreef een groot wiskundig werk in acht boeken. Het werk wordt meestal aangeduid met de latijnse vertaling van de titel, namelijk Collectio (verzameling). In de Collectio verzamelde Pappus kommentaren, uittreksels en hulpstellingen bij in zijn tijd bekende wiskundige werken. De meeste van die werken zijn later verloren gegaan, zodat de Collectio de belangrijkste, en vaak de enige, bron is waaruit wij informatie over die andere werken hebben. Het werk is in de bloeiperiode der Islam Wiskunde niet bekend geweest; in het westen is het voor het eerst in 1588 in boekvorm uitgegeven. De moderne standaard editie is die van Hultsch [1876] waarin de Griekse tekst staat met een vertaling in het latijn door Hultsch. Er is ook een Franse vertaling van Vereecke [1933]. Al deze edities zijn gebaseerd op een 12e eeuws Grieks manuscript dat in het Vaticaan bewaard wordt. Dat manuscript is overigens niet geheel volledig; boek I en een gedeelte van boek II ontbreken, daarvan kennen we dus de inhoud niet.

In het zevende boek van de Collectio bespreekt Pappus een reeks werken van Euclides (fl. ca. 300 v.C.), Apollonius (fl. ca. 200 v.C.) en Aristaeus (fl. ca. 340 v.C.). Bij elk werk geeft hij een inhoudsoverzicht en een aantal lemma's, dat wil zeggen stellingen die hij van belang vindt voor het begrip van het werk en die blijkbaar in het werk zelf als bekend verondersteld worden. Een van de werken die Pappus behandelt is Euclides' Porismen. Dit werk, dat uit drie boeken bestond, is later verloren gegaan; we weten er over vrijwel alleen wat Pappus ervan zegt. Bij dit werk geeft Pappus 38 lemma's, en het dertiende lemma bevat de stelling die nu naar Pappus wordt genoemd.

Ik geef hieronder de stelling met het bewijs en de twee eerdere lemma's (3 en 10) waarop het bewijs berust. Ik geef geen letterlijke vertaling van de tekst maar een parafrase die de gang van het wiskundige argument weergeeft. Ik heb bij elk der drie lemma's ter verduidelijking een "projektieve interpretatie" toegevoegd, maar bedenk wel dat dat een moderne interpretatie is die we bij Pappus zelf niet vinden. Om te laten zien hoe de letterlijke tekst er uit zag geef ik eerst de Griekse tekst van de stelling uit Hultsch' editie met een eigen vertaling in het Nederland (Pappus [1876] 2 p. 886).



ιγ'. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν αἱ ΑΒ ΓΔ παράλληλοι, ἀλλὰ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ν· ὅτι πάλιν εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν Η Μ Κ.



Ἐπεὶ εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΑΝ ΑΖ ΑΔ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Γ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΕ ΓΔ, γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΓΕ ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ ΘΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΝ ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΝΔ ΓΖ: πάλιν ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Δ εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΒΝ ΒΓ ΒΖ δύο εἰσὶν διηγμέναι αἱ ΔΕ ΔΝ, ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓ ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔ ΖΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΚ ΕΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΚΛ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓ ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔ ΓΖ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΓΕ ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ ΘΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕ ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ ΘΕ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΔΚ ΕΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΚΛ [ἀπῆκται εἰς ὃ καὶ ἐπὶ τῶν παραλλήλων]. διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν Η Μ Κ.

Vertaling:

13. Maar laten AB en ΓΔ niet evenwijdig zijn, maar samen komen in N; dan zeg ik dat de lijn door H M K recht is. Want ten opzichte van de drie rechten AN AZ AΔ zijn uit eenzelfde punt Γ twee rechten ΓE ΓΔ getrokken, en dus staat de <rechthoek>* van ΓE HΘ tot die van ΓH ΘE als die van ΓN ZΔ tot die van NΔ ΓZ. En opnieuw, omdat uit een zelfde punt Δ ten opzichte van drie rechten BN BΓ BZ twee rechten ΔE ΔN zijn getrokken, staat de <rechthoek> van NΓ ZΔ tot die van NΔ ZΓ als die van ΔK EΛ tot die van ΔE KΛ. Maar er is bewezen dat de <rechthoek> van NΓ ZΔ staat tot die van NΔ ΓZ als die van ΓE HΘ tot die van ΓH ΘE; en derhalve staat ook de <rechthoek> van ΓE ΘH tot die van ΓH ΘE als die van ΔK EΛ tot die van ΔE KΛ [het is nu teruggevoerd op hetgeen ook bij de evenwijdige lijnen optrad**]. Uit het hierboven vermelde*** volgt dan dat de lijn door H M K recht is.****

(Noten: *: Pappus gebruikt hier een afkorting:
τὸ ὑπὸ τῶν AB ΓΔ, wat betekent de rechthoek met als zijden AB en ΓΔ; ik heb aan het begin van iedere evenredigheid het woord rechthoek toegevoegd.

**: Door de rechte haken geeft Hultsch aan dat hij de woorden ertussen als een latere toevoeging beschouwt; de zinsnede verwijst blijkbaar naar lemma 12 waar het geval behandeld wordt waarin de lijnen AEB en ΓZΔ evenwijdig zijn.

***: Namelijk lemma 10.

****: Hultsch gebruikt in zijn latijnse vertaling kleine griekse letters voor de punten; vandaar dat in de, door Hultsch toegevoegde figuur kleine letters staan; ik heb links in de kantlijn een figuur met de overeenkomstige hoofdletters toegevoegd.)

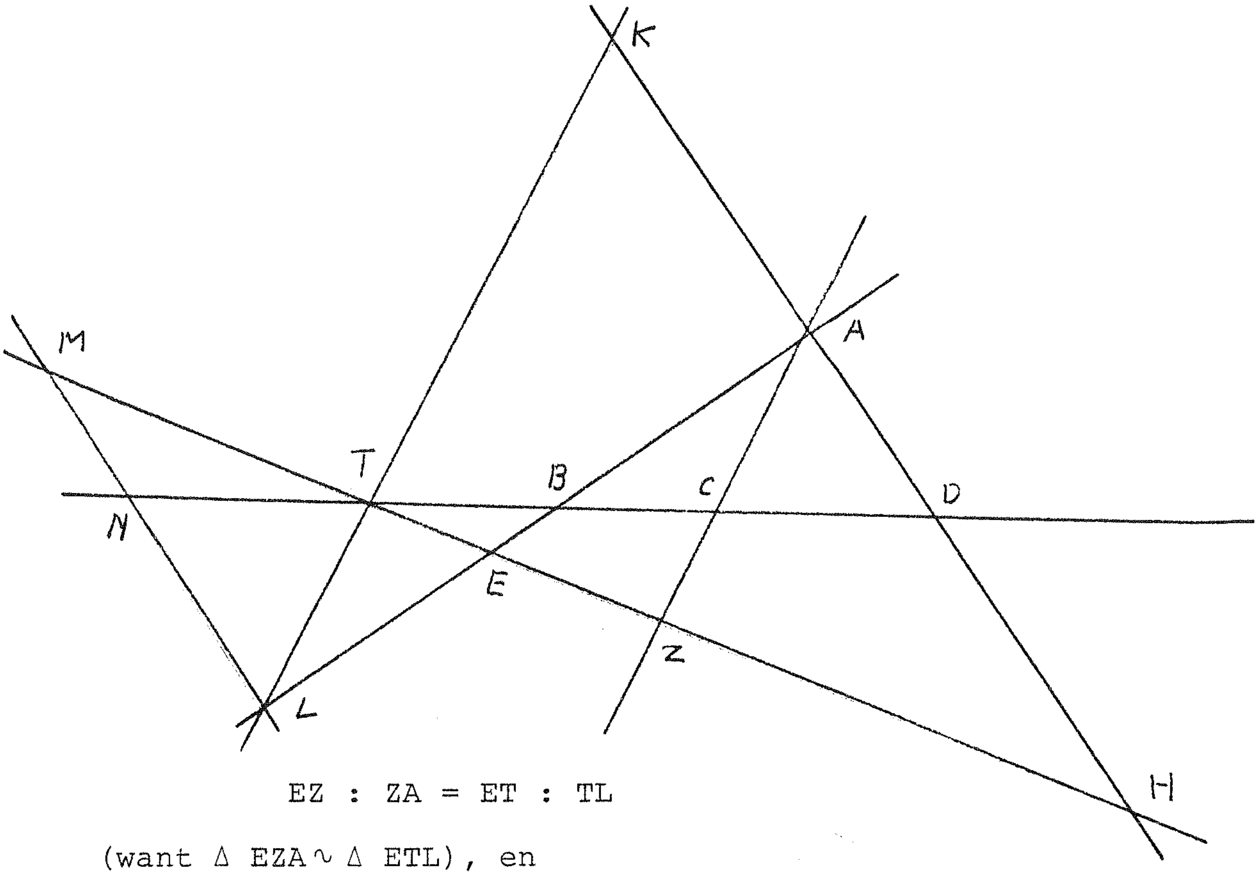
<u>De lemma's 3 en 10, en de stelling (lemma 13)</u>

<u>Lemma 3</u> (Pappus [1876] <u>2</u> pp. 870-873)

Gegeven: drie lijnen die elkaar snijden in A, twee lijnen die elkaar snijden in T, onderlinge snijpunten als aangegeven in de figuur.
Dan geldt:

$$(TE \times HZ) : (TH \times ZE) = (TB \times DC) : (TD \times BC).$$

Bewijs: Trek door T de lijn KL ∥ AZ, en door L de lijn LM ∥ AK. Dan is:



$$EZ : ZA = ET : TL$$

(want $\Delta\, EZA \sim \Delta\, ETL$), en

$$ZA : ZH = LT : TM$$

(want $\Delta\, AZH \sim \Delta\, LTM$). Dus

$$EZ : ZH = ET : TM.$$

(hier wordt de stelling gebruikt die zegt dat uit $a : b = d : e$ en $b : c = e : f$ volgt $a : c = d : f$). Daaruit volgt

$$ZH \times ET = EZ \times TM.$$

Dan is

$$\begin{aligned}(TE \times HZ) : (TH \times ZE) &= (EZ \times TM) : (TH \times ZE)\\ &= TM : TH\\ &= TL : TK\end{aligned}$$

(want $\Delta\, MTL \sim \Delta\, HTK$). Nu is dus de verhouding $(TE \times HZ) : (TH \times ZE)$ op de lijn TH teruggebracht tot de verhouding $TL : TK$ op de lijn LK. Daarbij is alleen gebruikt dat $LK \parallel AZ$ en dat TH door T gaat. We kunnen dus het zelfde bewijs op de lijn TD toepassen, met hulplijnen TN en LN, en we krijgen:

$$(TB \times CD) : (TD \times BC) = TL : TK.$$

Kombineren van beide resultaten levert

$$(TE \times HZ) : (TH \times ZE) = (TB \times DC) : (TD \times BC),$$

hetgeen te bewijzen was.

[Projektieve interpretatie.

De waaier $\mathring{A}$ induceert een perspektiviteit $\mathring{TD} \to \mathring{TH}$ waarbij $T \to T$, $B \to E$, $C \to Z$ en $D \to H$. Onder deze perspektiviteit blijven dubbelverhoudingen invariant dus

$$\frac{TE.HZ}{TH.ZE} = \frac{TB.DC}{TD.BC}.$$

In het bewijs worden beide dubbelverhoudingen geprojekteerd van uit A op LK, dus $T \to T$, $E \to L$, $Z \to \infty$, $H \to K$ en $T \to T$, $B \to L$, $C \to \infty$, $D \to K$. Pappus bewijst rechtstreeks (met gelijkvormigheden) dat bij deze projekties de dubbelverhouding overgaat in een enkelvoudige verhouding:

$$\frac{TE.HZ}{TH.ZE} = \frac{TL}{TK}$$

en

$$\frac{TB.DC}{TD.BC} = \frac{TL}{TK}.$$

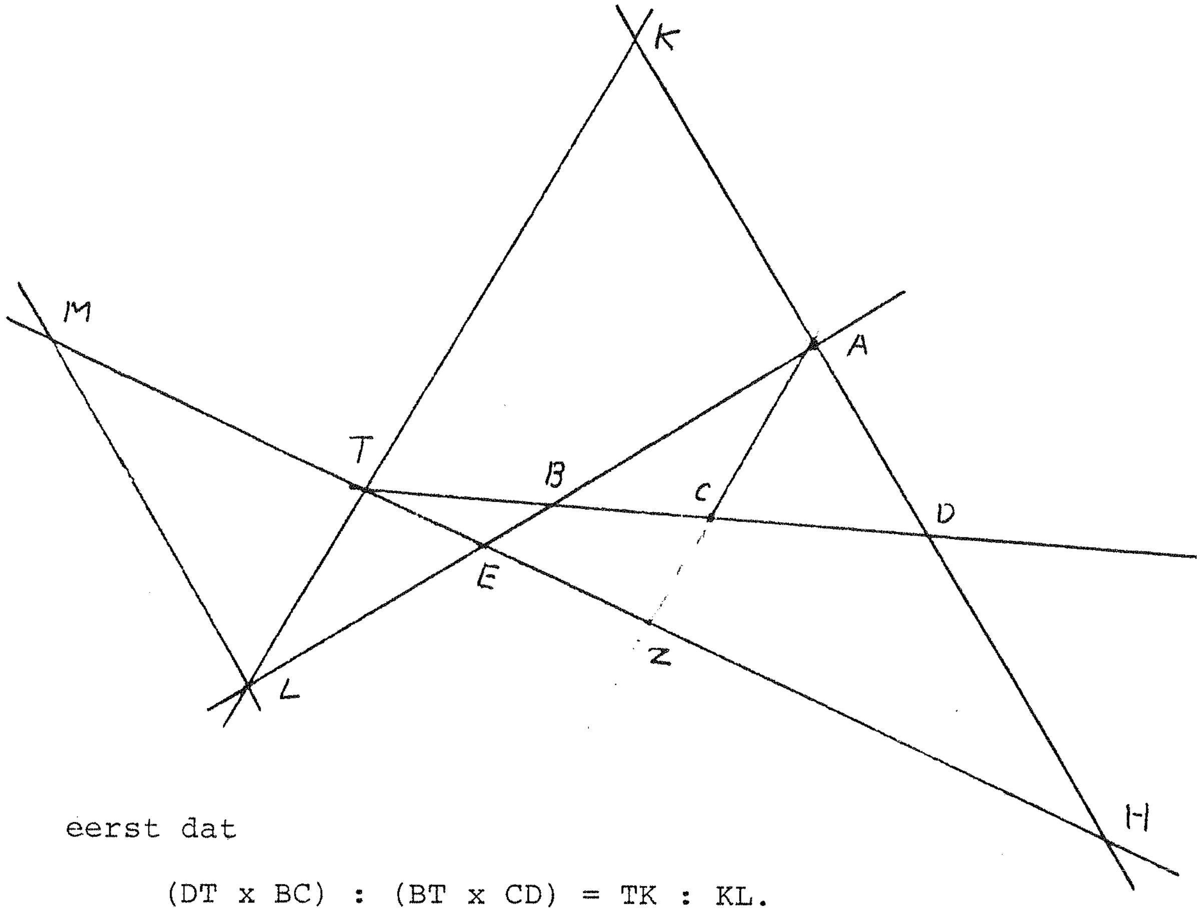
$\frac{TL}{TK}$ is inderdaad op te vatten als de dubbelverhouding $\frac{TL.K\infty}{TK.L\infty}$.

Lemma 3 bewijst dus de invariantie der dubbelverhouding onder perspektiviteiten, met die beperking dat het snijpunt der beide lijnen als een der punten in de dubbelverhouding optreedt. Hieruit kan eenvoudig de invariantie van de dubbelverhouding in het algemeen worden afgeleid; Pappus doet dat echter niet. Doordat Pappus niet met "punten in het oneindig" werkt moet hij het geval van evenwijdigheid steeds appart behandelen; hij kan niet de verhouding $\frac{TL}{TK}$ als dubbelverhouding $\frac{TL.K\infty}{TK.L\infty}$ opvatten.]

<u>Lemma 10</u> (Pappus [1876] <u>2</u> pp. 880-883)
(Lemma 10 is de omkering van lemma 3.)
Gegeven: twee lijnen die elkaar snijden in A, twee lijnen die elkaar snijden in T, onderlinge snijpunten als aangegeven in de figuur. Verder C op TD en Z op TH zó dat

$$(DT \times BC) : (DC \times BT) = (TH \times ZE) : (TE \times ZH).$$

Dan geldt: C en Z liggen op één rechte door A.
Bewijs: Trek door T lijn $KL \parallel AC$. Evenals in lemma 3 bewijst Pappus



eerst dat

(DT x BC) : (BT x CD) = TK : KL.

Trek nu LM ∥ AK, dan is

TK : TL = TH : TM,

zodat uit de gegeven verhouding volgt

(TH x ZE) : (TE x ZH) = TH : TM.

Uitwerken levert

ZE : TE = ZH : TM.

Deze verhouding wordt als volgt omgewerkt:

ZE : ZH = TE : TM

(verwisseling van de binnentermen)

ZE : HE = TE : EM

(toepassing van de regel a : b = c : d ⇒ (a+b) : b = (c+d) : d).

ZE : TE = HE : EM

(verwisseling van de binnentermen). Maar

HE : EM = AE : EL

(want ML ∥ AH) zodat

ZE : TE = AE : EL.

Dus is Δ ETL gelijkvormig met Δ EZA, zodat AZ evenwijdig is aan LT. Maar AC is ook evenwijdig aan LT, dus liggen Z en C op één rechte door A, hetgeen te bewijzen was.

[Projektieve interpretatie.

Het lemma zegt dus dat, wanneer

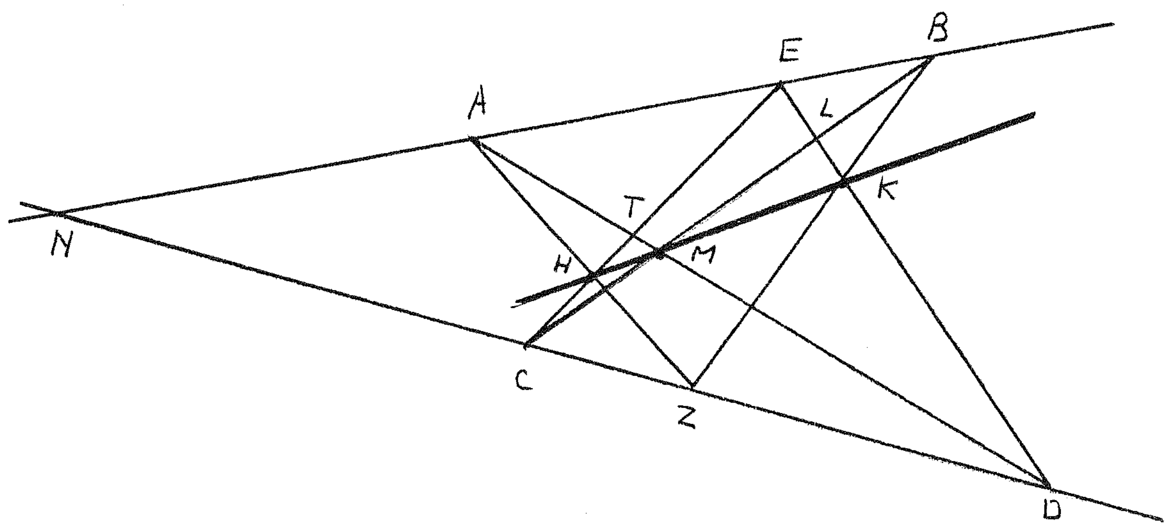
$$DV(D,B;C,T) = DV(H,E;Z,T),$$

er een perspectiviteit moet zijn (met centrum A) zodat $B \rightarrow E$, $C \rightarrow Z$ en $D \rightarrow H$. Merk overigens op dat in Pappus' formulering de gegevens niet volledig zijn. Omdat hij niet met geöriënteerde lijnstukken werkt, betekent de gegeven verhouding dat

$$DV(D,B;C,T) = \pm\, DV(H,E;Z,T)$$

er zijn dus eigenlijk twee mogelijke posities voor Z op TH en slechts voor een ervan geldt de stelling. Pappus heeft dit niet opgemerkt. - Het bewijs wordt geleverd met behulp van de theorie van evenwijdigheid en gelijkvormigheid.]

<u>Lemma 13, de "stelling van Pappus"</u> (Pappus [1876] <u>2</u> pp. 886-887)
Gegeven: twee lijnen door N; punten A,E,B op de ene lijn en C,Z,D op de andere; verdere lijnen en punten als in de figuur.
Dan geldt: H, M en K liggen op één rechte.
Bewijs: Lemma 3 toegepast op de drie rechten AH, AZ en AP door A en de twee lijnen CE en CD door C levert:



$$(CE \times HT) : (CH \times TE) = (CN \times ZD) : (CZ \times ND).$$

Opnieuw lemma 3 toegepast op drie rechten BN, BC, BZ door D en twee rechten DE, DN door D:

$$(NC \times ZD) : (ND \times ZC) = (EL \times KD) : (ED \times KL).$$

Kombinatie van deze twee gelijkheden:

$$(CE \times HT) : (CH \times TE) = (EL \times KD) : (ED \times KL).$$

Nu is lemma 10 van toepassing: twee lijnen door M, twee lijnen door E, verdere snijpunten als in dat lemma en punten H en K die voldoen aan de laatst genoemde gelijkheid, dus: lijn HK gaat door M, hetgeen te bewijzen was. (Vergelijk de oorspronkelijke tekst!).

[Projektieve interpretatie.

De twee perspektiviteiten $\overset{\circ}{CE} \rightarrow \overset{\circ}{A} \rightarrow \overset{\circ}{CD}$ en $\overset{\circ}{CD} \rightarrow \overset{\circ}{B} \rightarrow \overset{\circ}{DE}$ leveren een projektiviteit waarbij $E \rightarrow E$, $T \rightarrow D$, $H \rightarrow K$, $C \rightarrow L$; daaruit volgt de gelijkheid der dubbelverhoudingen

$$\frac{CE.HT}{CH.TE} = \frac{EL.KD}{ED.KL}.$$

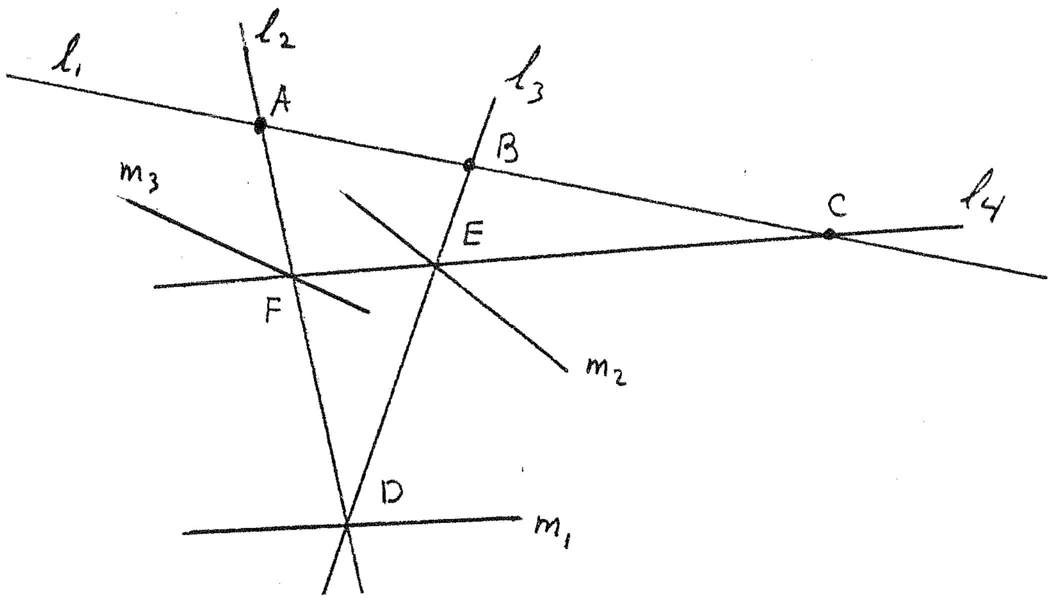
Omdat E in beide dubbelverhoudingen voorkomt moet er (omkering van lemma 3) een perspektiviteit zijn met $E \rightarrow E$, $T \rightarrow D$, $H \rightarrow K$, $C \rightarrow L$. Het centrum is blijkbaar M, dus moet HK door M gaan.]

Euclides' Porismen en de overige lemma's van Pappus

In zijn bericht over Euclides' Porismen legt Pappus uitvoerig maar niet erg helder uit wat porismen zijn. Het woord "porisme" werd, vooral in wiskundige werken vanaf de Renaissance, maar ook wel in de oudheid, gebruikt als synoniem met "corollarium": een uit een stelling eenvoudig af te leiden resultaat. Die betekenis is in het geval van Euclides' porismen niet bedoeld. Pappus legt uit dat het gaat om een soort propositie dat het midden houdt tussen stelling (met bewijs) en probleem (met konstruktie). In Euclides' Elementen zijn de meeste proposities òfwel stellingen òfwel problemen. Echter in andere, meer geavanceerde griekse wiskundige werken komen vaak proposities voor die, volgens de grieken, noch een gewone stelling, noch een probleem waren. Blijkbaar werd voor zulke stellingen de term porisma gebruikt. Ook Proclus (ca. 410-486 n.C.) schrijft over deze indeling van proposities. Ik ga er hier niet verder op in.

Pappus geeft in het totaal 38 lemma's ter inleiding op Euclides' Porismen. Zes daarvan betreffen (zoals nrs. 3 en 10) wat wij zouden noemen de invariantie van dubbelverhoudingen; vier zijn varianten op de "stelling van Pappus" (gevallen waarbij evenwijdigheid optreedt); zes andere betreffen wat modern heet de ligging van zes punten "in involutie" op een lijn. De overige gaan ondermeer over de harmonische ligging van punten op lijnen.

In zijn overzicht van de inhoud van de Porismen vermeldt Pappus nog dat de eerste tien stellingen van dat werk samengevat kunnen worden in één stelling. Die stelling, die later het "vier lijnen porisma" is gaan heten, luidt (in vrije parafrase) als volgt (Pappus [1876] 2 pp. 652-655):



Beschouw vier lijnen $l_1,\ldots,l_4$ met hun zes onderlinge snijpunten. Fixeer de snijpunten A, B en C op de eerste lijn. Laten de lijnen l_2, l_3 en l_4 zó rond A, B en C draaien, dat de snijpunten D van l_2 en l_3 en E van l_3 en l_4 bewegen langs vaste rechten m_1 en m_2. Dan beweegt het snijpunt F van l_2 en l_4 langs een vaste rechte m_3.

Pappus geeft geen bewijs, hij geeft wel een generalisatie waarbij meer dan vier lijnen optreden. Het "vier lijnen porisma" is equivalent met de stelling van Desargues (het bewijs van die equivalentie laat ik aan de lezer over).

We zien dus dat Pappus in verband met Euclides' Porismen een groot aantal onderwerpen behandelt die, modern gezien, thuis horen in de projektieve meetkunde. Die onderwerpen komen vrijwel nergens anders in de ons bekende griekse wiskundige geschriften voor. Toch moet de kennis over deze zaken zeer geavanceerd zijn geweest: als de lemma's die Pappus vermeldt inderdaad zonder bewijs door Euclides in zijn Porismen zijn gebruikt lijkt het voor de hand te liggen dat in dat werk zelf de onderwerpen aanmerkelijk verder uitgewerkt zijn. En in elk geval moeten we aannemen dat ten tijde van Euclides (meer dan 600 jaar vóór Pappus!) de lemma's die Pappus geeft al bekend waren. De vraag wat er dan wel in Euclides' Porismen stond, wordt daarmee zeer fascinerend.

Die vraag heeft vele wiskundigen sinds het bekend worden van Pappus' Collectio bezig gehouden. Sommigen hebben geprobeerd Euclides' Porismen te rekonstrueren op basis van de lemma's en de, overigens zeer duistere, mededelingen van Pappus in zijn overzicht van de inhoud. Zo zijn er rekonstrukties bekend van onder meer E. Halley (1656?-1743), R. Simson (1687-1768) en M. Stewart (1717-1785). De belangrijkste rekonstruktiepoging is geleverd door M. Chasles (1793-1880) (Chasles [1860]). Tijdens zijn studie over Euclides Porismen raakte Chasles overtuigd van het belang van de dubbelverhouding in de meetkunde en hij is een der eersten geweest die de dubbelverhouding zeer nadrukkelijk als grondbegrip van de projektieve meetkunde gebruikte. Zijn werk is een duidelijk (hoewel in moderne tijden zeer zeldzaam) voorbeeld van nieuwe wiskundige resultaten geïnspireerd door historische onderzoek.

Overigens wordt Chasles' rekonstruktie op het ogenblik niet meer als bevredigend gezien. Huidige historici der wiskunde hebben feitelijk het probleem opgegeven; men berust er in dat het zonder nadere informatie onmogelijk is om te weten te komen wat er in Euclides' Porismen gestaan heeft. En zo zal wellicht de oorsprong van een aantal begrippen uit de projektieve meetkunde altijd onbekend blijven.

De verdere geschiedenis van de stelling

Pas D. Hilbert (1862-1943) heeft in zijn werk over de grondslagen der meetkunde [1899] het belang van de stelling van Pappus in de axiomatische opbouw der meetkunde onderkend. Hij bewees dat uit die stelling de stelling van Desargues en de kommutativiteit van het koördinaten lichaam volgt. Hij noemde de stelling overigens niet naar Pappus maar naar Pascal, omdat het een bijzonder geval is van de stelling van Pascal, namelijk het geval waarin de kegelsnede ontaard is en bestaat uit twee lijnen. Al eerder was gezien dat het dertiende lemma van Pappus inderdaad zo'n speciaal geval is van de stelling van Pascal - Chasles merkt dat bijvoorbeeld ook op. Maar de stelling heeft vóór Hilbert geen speciale aandacht gekregen.

4. De stelling van Desargues

Girard Desargues (1591-1661) was een franse architect die zich, in verband met de architectuur, ook verdiepte in de wiskundige theorie van het perspektief, en in de meetkunde in het algemeen. Hij heeft een aantal inzichten geformuleerd die later in de projektieve meetkunde een belangrijke rol zijn gaan spelen. Bij zijn tijdgenoten kregen zijn ideeën echter heel weinig aandacht en ze raakten snel vergeten. Pas toen in de negentiende eeuw de theorie der projektieve meetkunde door een groter aantal wiskundigen werd uitgewerkt raakte men weer geïnteresseerd in Desargues' werk en erkende men hem als een belangrijke maar geïsoleerde voorloper in de ontwikkeling van de projektieve meetkunde.

De belangrijke "projektieve" ideeën van Desargues waren:

- Zijn inzicht dat evenwijdigheid van rechten opgevat kan worden als snijden in een oneindig ver punt, waardoor bundels lijnen door één punt en bundels evenwijdige lijnen op één en dezelfde manier bestudeerd kunnen worden.
- Zijn studie van involuties op rechten en van de pool-poollijn relatie bij kegelsneden.
- Zijn opvatting van kegelsneden als perspektieve beelden van cirkels, waardoor hij een algemene behandeling van kegelsnedentheorie kon geven en de nadruk legde op projektief invariante eigenschappen van kegelsneden.
- Zijn <u>stelling</u>.

In dit stuk gaat het om de stelling, ik zal dus over de eerste drie zaken kort zijn.

Het eerstgenoemde inzicht onleende Desargues aan wiskundige leer van het perspektief, waarover hij in 1636 een boek publiceerde. In de perspektief leer was het bekend dat evenwijdige lijnen als in één punt samen komende lijnen worden afgebeeld (tenzij ze evenwijdig zijn aan het vlak waarin afgebeeld wordt). Desargues is nu de eerste geweest die uit dit in de perspektief optredende verschijnsel de konklusie trok dat algemeen in de meetkunde evenwijdige lijnen als in een oneindig ver punt snijdende lijnen opgevat kunnen worden. In de jaren na 1636 heeft hij dit idee uitgewerkt. Hij was van plan er een groter meekundig werk over te schrijven. Dat is niet gebeurd; wel publiceerde Desargues in 1639 een kort en schetsmatig pamflet over zijn ideeën. Dit is het "Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan" (schetsmatig ontwerp van een essay over de verschijnselen bij snijding van een kegel met een vlak"). Hierin vinden we de drie eerstgenoemde ideeën (niet de stelling). Ter illustratie volgt hieronder Desargues' uitleg, in het "Brouillon project" van evenwijdige lijnen als snijdend in het oneindig. De tekst is ontleend aan Taton's studie over Desargues [1951], de vertaling is van mij. (Taton [1951] p. 99)

Icy toute ligne droite est entendüe alongée au besoin à l'infiny d'une part & d'autre

(...)

Ordonnance de lignes droictes. Pour donner à entendre de plusieurs lignes droictes, qu'elles sont toutes entre elles ou bien paralleles, ou bien inclinées à mesme poinct, il est icy dit, que toutes ces droictes sont d'une mesme *ordonnance* entre elles, par où l'on concevra de ces plusieurs droictes, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, elles tendent comme toutes à un mesme endroict

But d'une ordonnance de droictes. L'endroict auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs droictes en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, est icy nommé, *but* de l'ordonnance de ces droictes.

Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs droictes en laquelle elles sont toutes paralleles entre elles, il est souvent icy dict que toutes ces droictes sont entre elles d'une mesme ordonnance, dont le but est à distance infinie en chacune d'elles d'une part & d'autre.

Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs droictes, en laquelle elles sont toutes inclinées à un mesme poinct, il est icy dit, que toutes ces droictes sont entre elles d'une mesme ordonnance, dont le but est à distance finie dans chacune d'elles.

Ainsi deux quelconques droictes en un mesme plan sont entre elles d'une mesme ordonnance, dont le but est à distance ou finie, ou infinie.

Vertaling:

Hier wordt iedere rechte lijn opgevat als zo nodig verlengd aan beide zijden tot in het oneindige.(-)

Ordonnantie van rechte lijnen

Om van een aantal lijnen aan te geven dat zij allen ofwel evenwijdig zijn, ofwel gericht naar eenzelfde punt, wordt hier gezegd dat al die rechten onderling van eenzelfde ordonnantie zijn; daarbij moet men zich voorstellen dat de lijnen, zowel in de ene als in de andere soort ligging, gericht zijn alle naar eenzelfde plaats.

Doel van een ordonnantie lijnen.

De plaats waarheen men zich voorstelt dat een aantal lijnen gericht is, zowel in de ene als in de andere soort ligging, wordt hier genoemd het doel van de ordonnantie van die lijnen.

Om de soort ligging aan te geven van een aantal lijnen waarbij ze alle onderling evenwijdig zijn, wordt hier vaak gezegd dat al die lijnen onderling van dezelfde ondonnantie zijn, waarvan het doel op oneindige afstand ligt op elk van hen aan beide zijden.

Om de soort ligging aan te geven van een aantal lijnen waarbij ze alle gericht zijn naar eenzelfde punt, wordt hier gezegd dat al die lijnen onderling van dezelfde ordonnantie zijn, waarvan het doel op eindige afstand ligt op elk van hen.

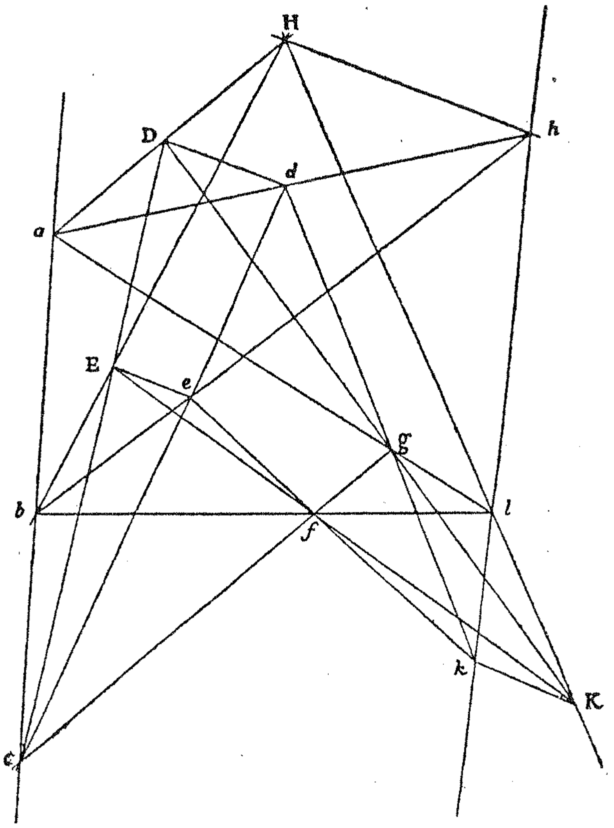
Zo zijn twee willekeurige lijnen in hetzelfde vlak steeds van een zelfde ordonnantie, waarvan het doel op eindige of oneindige afstand ligt.

Desargues voerde in het "Brouillon project" vele nieuwe ideeën in en gebruikte daarbij een vreemde, deels aan de plantkunde ontleende terminologie. Ook anderszins was het werk vaak erg duister geschreven; het bleef dan ook vrijwel onbekend. Tot 1950 meende men zelfs dat alle exemplaren verloren waren (Desargues had er ongeveer 50 laten drukken); men kende de inhoud alleen uit een manuscriptkopie die Ph. de la Hire (1640-1718) had gemaakt en die door Chasles in 1845 was gevonden. In 1950 is echter een exemplaar van het "Brouillon project" teruggevonden in de Bibliothèque Nationale te Parijs.

Desargues' stelling

Desargues' stelling stamt niet uit het "Brouillon project" maar uit een in 1648 door Abraham Bosse te Parijs gepubliceerd boek Maniere universelle de Mr. Desargues pour pratiquer la perspective. Achter in dit boek worden, buiten verband met de rest van het boek, drie meetkundige stellingen vermeld. Die stellingen moeten aan Desargues worden toegeschreven; de eerste bevat de later beroemd geworden "stelling van Desargues". De stelling bestaat uit drie gedeelten. Het eerste is wat nu de stelling van Desargues wordt genoemd, het tweede is de duale stelling, het derde is een gevolgtrekking uit de stelling.

Hieronder volgt de franse tekst van de eerste twee gedeelten, overgenomen uit Taton [1951], ik heb een Nederlandse vertaling en kommentaar toegevoegd. (Taton [1951] p. 206-207).



Quand ces droites HD*a*, HE*b*, *c*ED, *lga*, *lfb*, H*l*K, D*g*K, E*f*K, soit en divers plans, soit en un mesme, s'entrerencontrent par quelconque ordre ou biais que ce puisse estre, en de semblables points; les points *c*, *f*, *g*, sont en une droite *cfg*. Car de quelque forme que la figure vienne, & en tous les cas; ces droites estants en divers plans, celles *abc*, *lga*, *lfb*, sont en un; celles DE*c*, D*g*K, K*f*E, en un autre; & ces poincts *c*, *f*, *g*, sont en chacun de ces deux plans; consequemment ils sont en une droite *cfg*. Et les mesmes droites estants en un mesme plan,

*g*D-*g*K	*a*D-*a*H *l*H-*l*K	*c*D-*c*E *b*E-*b*H	*c*D-*c*E	*g*D-*g*K *f*K-*f*E	Consequem-ment *c*, *g*, *f*, sont en une droite.
*f*K-*f*E	*l*K-*l*H *b*H-*b*E	*b*H-*b*E			

Et par converse les droites *abc*, HD*a*, HE*b*, DE*c*, HK, DK*g*, KE*f*, venants à se rencontrer par quelconque biais & forme, en des semblables points, & soit en divers plans soit en un mesme; toujours les droites *agl*, *bfl*, tendent ensemble à un mesme but *l*, en celle HK. Car ces droites estants en divers plans, celui HK*g*D*ag*, en est l'un; celuy HK*f*E*bf*, un autre; & celuy *cbagf*, un autre : & les droites H*l*K, *bfl*, *agl*, sont les entrecoupures de ces trois plans-là; consequemment elles tendent ensemble à un mesme but *l*. Et les mesmes droites estants en un seul plan; ayant mené du point *a*, jusques à la droite HK, celle *agl*, & puis menant celle *lb*, il vient d'estre demonstré qu'elle tend avec celle EK, à un point qui comme *f*, est en une droite avec ceux *c*, & *g*, qui est à dire qu'elle passe à *f*, & consequemment que les deux *ag*, *bf*, tendent ensemble à un but *l*, en celle HK.

Nederlandse vertaling

(1) Wanneer rechten HDa, HEb, cED, lga, lfb, HlK, DgK, EfK, hetzij in verschillende vlakken, hetzij in één vlak, elkaar onderling

treffen in willekeurige ordening en richting in punten zoals aangegeven, dan zullen de punten c f g op een rechte cfg liggen.

(2) Want hoe de vorm van de figuur ook wordt, in alle gevallen geldt: wanneer de rechten in verschillende vlakken liggen, dan liggen abc, lga, lfb in één, DEc, DgK, KfE in een ander, en de punten c, f, g liggen in elk van die beide vlakken, bijgevolg liggen ze op een rechte cfg.

(3) En wanneer die zelfde lijnen in één vlak liggen,

gD-gK	$\left\{\begin{matrix}aD-aH\\lH-lK\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}cD-cE\\bE-bH\end{matrix}\right\}$	cD-cE	$\left\{\begin{matrix}gD-gK\\fK-fE\end{matrix}\right.$	Bijgevolg liggen c, g, f op een rechte.
fK-fE	$\left\{\begin{matrix}lk-lH\\bH-bE\end{matrix}\right\}$	bH-bE			

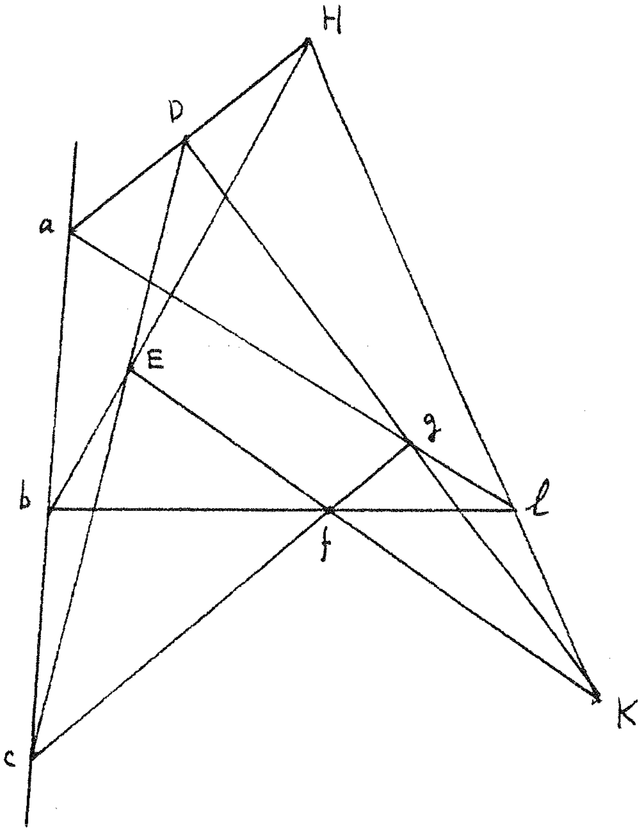
(4) En omgekeerd als de rechten abc HDa HEb DEc HK, DKg KEf elkaar in willekeurige richting en vorm treffen in punten als aangegeven, hetzij in verschillende vlakken, hetzij in een zelfde vlak, dan zullen steeds de rechten agl, bfl samen gericht zijn op een zelfde doel l dat ligt op de lijn HK.

(5) Want als de lijnen in verschillende vlakken zijn dan is HKgDAg een van die vlakken, HKfEbf is een ander, en cbagf is ook een ander: en de drie rechten HlK, bfl, agl, zijn de snijlijnen van die drie vlakken, bijgevolg zijn zij gericht op een zelfde doel l.

(6) En wanneer diezelfde lijnen in één vlak liggen, laat van het punt a naar de rechte HK de rechte agl getrokken zijn, en vervolgens lb, het is zojuist bewezen dat die samen met EK gericht is op een punt dat, zoals f, op een lijn ligt met c en g, wat wil zeggen dat die door f gaat en bijgevolg dat de twee ag, bf, samen gericht zijn op een doel l dat ligt op HK.

Kommentaar

Voor de hier geciteerde gedeelten zijn niet alle elementen uit de figuur nodig, maar alleen de punten en lijnen in de figuur hieronder.



De tekst is als volgt opgebouwd:

(1) de stelling,
(2) bewijs voor het geval dat de punten niet in één vlak liggen,
(3) bewijs in het vlakke geval,
(4) de duale stelling,
(5) bewijs in het ruimtelijke geval,
(6) bewijs in het vlakke geval,

Ik geef nu per paragraaf uitleg en kommentaar.

(1) De gegevens zijn hier niet volledig, Desargues vermeldt niet dat ook a, b en c op één rechte liggen. Uit de bewijzen in (2) en (3) blijkt dat hij dat wel bedoelt. Desargues formuleert de stelling als sluitstelling (hij spreekt in het hele stuk niet over perspektieve driehoeken). De 10 gegeven punten zijn: a, b, c, f, g, l, D, E, K, H. Hiervan zijn 9 drietallen kollineair, te weten: abc, HDa, HEb, cED, lga, lfb, HlK, DgK en EfK. De konklusie is dat de punten die ieder in slechts twee van de 9 drietallen voorkomen, namelijk c, f en g, ook kollineair moeten zijn.

(2) In het ruimtelijke geval liggen de punten a, b, c, f, g, l in één vlak; E, D en H liggen erboven, K eronder. De perspektieve driehoeken (waar Desargues dus niet over spreekt) zijn Δ abl

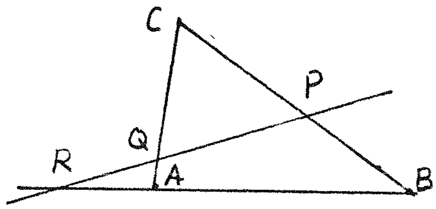
en Δ DEK; ze zijn perspektief uit H. De lijn cfg is recht omdat het de snijlijn is van vlak abl en vlak DEK.

(3) Het bewijs voor het vlakke geval is bewerkelijker. Desargues gebruikt hier een speciale notatie: - staat voor delen (of verhouding nemen); onder elkaar plaatsen (dus eigenlijk optellen) staat voor vermenigvuldigen. Accolades geven gelijkheid aan. Dus

$$gD\text{-}gK \quad \text{betekent} \quad \frac{gD}{gK}$$

en

$$gD\text{-}gK \quad \left\{\begin{matrix} aD\text{-}aH \\ lH\text{-}lK \end{matrix}\right. \quad \text{betekent} \quad \frac{gD}{gK} = \frac{aD}{aH} \cdot \frac{lH}{lK}$$



Verder gebruikt Desargues hier de stelling van Menelaus. Deze stelling, afkomstig van Menelaus (fl. ca. 100 n.C.) en algemeen bekend in de 17e eeuw luidt als volgt:

Gegeven: driehoek ABC en punten P, Q en R op de (zo nodig verlengde) zijden BC, AC en AB respektievelijk.

Er geldt: P, Q en R liggen op één rechte dan en slechts dan als AQ.CP.BR = AR.BP.CQ.

De rechte PQR wordt "transversaal" van de driehoek genoemd. De gelijkheid wordt ook wel geschreven als

$$\frac{AQ}{CQ} = \frac{AR.BP}{BR.CP}$$

of analoge varianten.

De formules die Desargues geeft kunnen we nu als volgt interpreteren:

$$\underbrace{\left(\frac{gD}{gK} \cdot \frac{fK}{fE}\right)}_{\text{1e kolom}} \stackrel{(\alpha)}{=} \underbrace{\left(\frac{aD}{aH} \cdot \frac{lH}{lK}\right)\left(\frac{lK}{lH} \cdot \frac{bH}{bE}\right)}_{\text{2e kolom}}$$

$$= \left(\frac{aD}{aH} \cdot \frac{bH}{bE}\right)$$

$$\stackrel{(\beta)}{=} \underbrace{\left(\frac{cD}{cE} \cdot \frac{bE}{bH}\right) \cdot \frac{bH}{bE}}_{\text{3e kolom}}$$

$$= \underbrace{\frac{cD}{cE}}_{\text{4e kolom}},$$

Dus

$$\underbrace{\frac{cD}{cE}}_{\text{4e kolom}} \overset{(\gamma)}{=} \underbrace{\frac{gD}{gK}\cdot\frac{fK}{fE}}_{\text{1e en 5e kolom}}.$$

Bij (α) en (β) is de stelling van Menelaus gebruikt:

$$\frac{gD}{gK} = \frac{aD}{aH}\cdot\frac{lH}{lK} \quad (\Delta\ \text{DKH, transversaal lag})$$

$$\frac{fK}{fE} = \frac{lK}{lH}\cdot\frac{bH}{bE} \quad (\Delta\ \text{KEH, transversaal blf})$$

$$\frac{aD}{aH} = \frac{cD}{cE}\cdot\frac{bE}{bH} \quad (\Delta\ \text{DHE, transversaal bca}).$$

Uit de gelijkheid (γ) en de omkering van de stelling van Menelaus (Δ DEK, punten f, g, c) volgt dat f, g en c op één rechte liggen.

(4) Hier wordt de duale van de stelling geformuleerd, namelijk het geval waar 10 lijnen optreden waarvan 9 drietallen konkurrent zijn. De fromulering is ook hier onvolledig: er wordt niet vermeld maar blijkbaar wel verondersteld (zoals blijkt in (5)) dat c f en g op één lijn liggen. De 10 lijnen en de 9 konkurrenties zijn:

l_1 = abc		
l_2 = HDa	$l_1 l_2 l_8$	(in a)
l_3 = HEb	$l_1 l_3 l_9$	(in b)
l_4 = DEc	$l_1 l_4 l_{10}$	(in c)
l_5 = HK	$l_2 l_3 l_5$	(in H)
l_6 = DKg	$l_2 l_4 l_6$	(in D)
l_7 = KEf	$l_5 l_6 l_7$	(in K)
l_8 = ag	$l_3 l_4 l_7$	(in E)
l_9 = bf	$l_6 l_8 l_{10}$	(in g)
l_{10} = cfg	$l_7 l_9 l_{10}$	(in f)

De stelling zegt dat de drie lijnen die ieder slechts in twee konkurrente drietallen voorkomen ook konkurrent zijn; in dit geval zijn dat l_5, l_8 en l_{10}, hun snijpunt is l.

p 24 ontbreekt maar de
tekst lijkt volledig

(5) Bewijs van (4) voor het ruimtelijke geval:

vlak V_1 = HKgDa bevat de lijnen l_2 l_5 l_6 l_8

vlak V_2 = HKfEbf bevat de lijnen l_3 l_5 l_7 l_9

vlak V_3 = cbagf bevat de lijnen l_1 l_8 l_9 l_{10}

De drie snijlijnen der vlakken zijn: $V_1 \cap V_2 = l_5$, $V_2 \cap V_3 = l_9$, $V_1 \cap V_3 = l_8$; deze snijden elkaar in één punt, hetgeen te bewijzen was.

(6) Hier wordt de omkering in het vlakke geval behandeld. Het idee van het bewijs is om de stelling (1) te gebruiken. Dat kan ook als volgt: Neem bij de 9 punten (genoemd in (4)) als 10e punt 1, het snijpunt van l_8 (ag) en l_9 (bf). Laat de lijn l_5 (HK) weg; er blijven 9 lijnen over waarop telkens drie punten liggen. Dan moet volgens 1 ook het 10e drietal punten kollineair zijn, in dit geval H, K en 1. 1 ligt dus op l_5 (HK) en bijgevolg gaan l_5, l_8 en l_{10} door één punt, hetgeen te bewijzen was.

De tekst geeft dit bewijs niet. Er wordt wel een omkering toegepast om (1) te kunnen gebruiken, maar daaruit wordt afgeleid dat c f en g op één rechte liggen, en daaruit weer dat ag, bf en HK alle door 1 gaan. Die laatste stap is niet gerechtvaardigd en bij de invoering van 1 wordt al verondersteld dat 1 zowel op ag, als op bf en HK ligt. Het bewijs is dus niet goed maar het idee om (4) uit (1) af te leiden is duidelijk aanwezig en zo'n afleiding is ook mogelijk.

De langzame erkenning van het belang van Desargues' stelling

In deze paragraaf geef ik een heel summier overzicht van de verdere geschiedenis van de stelling van Desargues. Ik maak daarbij gebruik van de skriptie van M. Pranger [1982]; voor nadere informatie verwijs ik naar die (heel mooie) skriptie, die via de auteur en via mij te raadplegen is.

De stelling van Desargues heeft in het begin weinig indruk gemaakt. Pas in 1804 duikt de stelling weer op in een geschrift van F.-J. Servois (1767-1847). Servois formuleert de stelling als uitspraak over perspektieve driehoeken in één vlak en lost er een landmeetkundig-militair probleem mee op. Hij verwijst niet naar Desargues; hij heeft de stelling zelf herontdekt.

J.V. Poncelet (1788-1867) die wel als de grondlegger van de projektieve meetkunde beschouwd mag worden, bespreekt de stelling in zijn Traité des propriétés projectives des figures [1822]. Hij noemt Servois' werk, stelt vast dat de stelling aan Desargues moet worden toegeschreven en verwijst naar Bosse's boek. Poncelet hecht echter geen speciaal belang aan de stelling.

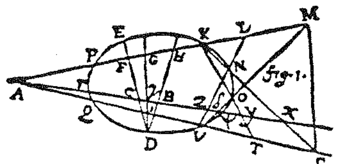
J. Gergonne (1771-1859) bespreekt de stelling in 1825/26 als een voorbeeld van een dualiseerbare stelling. J. Steiner (1796-1863) bewijst in 1826 de stelling opnieuw en brengt hem in verband met andere meer ingewikkelde stellingen over perspektieve figuren. K. van Staudt (1798-1867) leidt in 1847 de vlakke stelling af uit de ruimtelijke, en gebruikt hem als hulpstelling bij een stelling over vierhoeken; die laatste stelling neemt in zijn opbouw van de projektieve meetkunde een centrale plaats in.

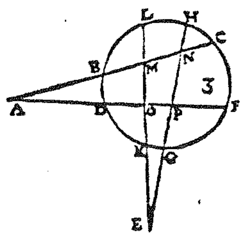
Pas D. Hilbert (1862-1943) onderkent in zijn Grundlagen der Geometrie [1899] expliceert de centrale positie die de stelling van Desargues inneemt in de axiomatische opbouw van de projektieve meetkunde. Hij bewijst daar onder meer dat een vlakke meetkunde waarin de stelling van Desargues geldt gekoördinatiseerd kan worden met een scheef lichaam.

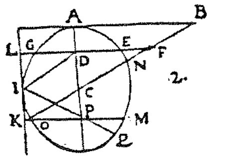
5. De stelling van Pascal

Blaise Pascal (1623-1662) was een frans geleerde, filosoof en religieus denker. Hij heeft belangrijke bijdragen geleverd aan de fysica en de wiskunde. Desargues heeft hem onderwezen in de meetkunde. Pascal heeft veel ideeën van Desargues overgenomen, in het bijzonder het gebruik van projektief invariante eigenschappen in de studie van kegelsneden. Pascal had het plan een uitgebreid werk over kegelsneden te schrijven; vooruitlopend daarop publiceerde hij in 1640 het Essay pour les Coniques ([1640], zie ook de facsimile). Dit is een stuk van één pagina waarin Pascal een schets geeft van de nieuwe theorie van kegelsneden. Het eerste lemma van het essay is de stelling van Pascal, geformuleerd voor een cirkel, maar verderop in het pamflet ook aangekondigd als geldend voor iedere kegelsnede.

Pascal is inderdaad begonnen het geplande werk over kegelsneden te schrijven maar hij heeft het niet voltooid en het







ESSAY POVR LES CONIQVES. Par B. P.

DEFINITION PREMIERE

QVAND plusieurs lignes droictes concourent à mesme point, ou sont toutes paralles entr'elles, toutes ces lignes sont dites de mesme ordre ou de mesme ordonnance, & la multitude de ces lignes, est dite ordre de lignes, ou ordonnance de lignes.

DEFINITION II.

Par le mot de section de Cone nous entendons la circonference du Cercle, l'Elipse, l'Hyperbole, la Parabole & Langle rectiligne, d'autant qu'vn Cone coupe paralellement à sa base, ou par son sommet ou des trois autres sens qui engendrent l'Elipse, l'Hyperbole & la parabole engendre dans la superficie Conique, ou la circonference d'vn Cercle ou vn Angle, ou l'Elipse, ou l'Hyperbole, ou la parabole.

DEFINITION III.

Par le mot de droite mis seul, nous entendons ligne droite.

LEMM. I.

Figure. I. Si dans le plan, M, S, Q du point M partent les deux droites MK, MV, & du point S, partent les deux droites SK, SV, & que K, soit le concours des droites MK, SK, & V, le concours des droites, MV, SV, & A, le concours des droictes MA, SA, & μ, le concours des droictes MV, SK, & que par deux des quatre points, A K μ V, qui ne soient point en mesme droite auec les points, M, S, comme par les points, K, V, passe la circonference d'vn cercle coupante les droites MV, MP, SV, SK, és points, O, P, Q, N, ie dis que les droites, MS, NO, PQ, sont de mesme ordre.

LEMM. II.

Si par la mesme droite passent plusieurs plans, qui soient coupez par vn autre plan, toutes les lignes des sections de ces plans sont de mesme ordre auec la droite par laquelle passent lesdits plans.

Fig. I. Ces deux Lemmes posez & quelques faciles consequences d'iceux nous demonstrerons que les mesmes choses estant posées qu'au premier Lemme, si par les points, K, V, passe vne quelconque section de Cone qui coupe les droites MK, MV, SK, SV, és points, P, O, N, Q, les droites MS, NO, PQ, seront de mesme ordre, cela sera vn troisiéme Lemme.

En suitte de ces trois Lemmes & de quelques consequences d'iceux nous donnerons des Elemens Coniques complets, à sçauoir toutes les proprietez des diametres & costez droits, des tangentes &c. la restitution du Cone presque sur toutes les données, la description des sections de Cone par points. &c

Fig. I. Quoy faisant, nous enonçons les proprietez que nous en touchons d'vne maniere plus vniuerselle qu'à l'ordinaire Par exemple celle cy si dans le plan M S Q, dans la section de Cone, P K V, sont menées les droictes AK, AV, atteignantes la section aux poincts PK, QV & que de deux de ces quatre poincts qui ne sont point en mesme droicte auec le poinct A, comme par les poincts K, V, & par deux poincts, N, O, pris dans le bord de la section sont menées quatre droictes KN, KO, VN, VO, coupantes les droictes AV, AP, aux poincts L, M, T, S, ie dis que la raison composée des raisons de la droicte PM, à la droicte MA, & de la droicte AS, à la droicte SQ, est la mesme que la composée des raisons de la droicte PL, à la droicte LA, & de la droicte AT, à la droicte TQ.

Fig. I. Nous demonstrerons aussi que s'il y a trois droictes DE, DG, DH, que les droictes AP, AR, coupent aux poincts F, G, H, C, γ, B, & que dans la droicte DC, soit determiné le poinct E, la raison composée des raisons du rectangle EF, en FG, au rectangle de EC, en Cγ, & de la droicte Aγ, à la droicte AG, est la mesme que la composée des raisons du rectangle EF, en FH, au rectangle EC, en CB, & de la droicte AB, à la droicte AH. Et est aussi la mesme que la raison du rectangle des droictes FE, FD, au rectangle des droictes, CE, CD, partant si par les poincts E, D, passe vne section de Cone qui coupe les droictes AH, AB, és poincts P, K, R, ψ, la raison composée des raisons du rectangle des droictes EF, FC, au rectangle des droictes EC, Cγ, & de la droicte γA, à la droicte AG, sera la mesme que la composée des raisons du rectangle des droictes FK, FP, au rectangle des droictes CR, Cψ, & du rectangle des droictes AR, Aψ, au rectangle des droictes AK, AP.

Fig. III. Nous demonstrerons aussi que si quatre droictes AC, AF, EH, EL, s'entrecoupent és poincts N, P, M, O, & qu'vne section de Cone coupe lesdites droictes és poincts C, B, E, D, H, G, L, K, la raison composée des raisons du rectangle de MC, en MB, au rectangle des droictes PF, PD, & du rectangle des droictes AD, AE, au rectangle des droictes AB, AC, est la mesme que la raison composée des raisons du rectangle des droictes ML MK, au rectangle des droictes PH, PG, & du rectangle des droictes EH, EG, au rectangle des droictes EK, EL.

Fig. I. Nous demonstrerons aussi cette proprieté, dont le premier inuenteur est Mr Desargues Lyonnois, vn des grands esprits de ce temps, & des plus versez aux Mathematiques, & entr'autres aux Coniques, dont les escripts sur cette matiere, quoy qu'en petit nombre, en ont donné vn ample tesmoignage à ceux qui en auront voulu receuoir l'intelligence: & veux bien aduoüer que ie doibs le peu que i'ay trouué sur cette matiere à ses escrits, & que i'ay tasché d'imiter autant qu'il m'a esté possible sa methode sur ce subjet, qu'il a traitté sans se seruir du triangle par l'axe: Et traittant generalement de toutes les sections de Cone, la proprieté merueilleuse dont est question est telle: si dans le plan MSQ y a vne section de Cone PQV, dans le bord de laquelle ayant pris les quatre poincts K, N, O, V, sont menées les droicts KN, KO, VN, VO, de sorte que par vn mesme des quatre poincts ne passent que deux droictes, & qu'vne autre droicte coupe tant l'abord de la section aux poincts R, ψ, que les droictes KN, KO, VN, VO, és poincts x y Z δ, ie dis que comme le rectangle des droictes Zr, Zψ, est au rectangle des droictes γr, γψ, ainsi le rectangle des droictes δr, δψ, est au rectangle droictes xr, xψ.

Fig. II. Nous demonstrerons aussi que si dans le plan de l'hyperbole ou de l'elipse, ou du cercle AGE, dont le centre est C, on mene la droicte AB, touchante au poinct A, la section, & qu'ayant mené le diametre CA, on prend la droicte AB, dont le quarré soit égal au quart du rectangle de la figure, & qu'on mene CB, alors quelque droicte qu'on mene, comme DE, parallele à la droicte AB, coupante la section en E, & les droictes AC CB, és poincts DF, si la section AGE, est vne elipse ou vn cercle, la somme des quarrez des droictes DE, DF, sera egale au quarré de la droicte AB, & dans l'hyperbole la difference des mesmes quarrez des droictes DE, DF, sera egale au quarré de la droicte AB.

Nous deduirons aussi quelques problemes, par exemple d'vn poinct donné mener vne droicte touchante vne section de Cone donnée.

Trouuer deux diametres coniuguez en angle donné.

Trouuer deux diametres en angle donné & en raison donnée.

Nous auons plusieurs autres Problemes & Theoremes & plusieurs consequences des precedens, mais la defiance que i'ay de mon peu d'experience & de capacité ne me permet pas d'en auancer dauantage aduant qu'il ait passé à l'examen des habiles gens, qui voudront nous obliger d'en prendre la peine; apres quoy si l'on iuge que la chose merite d'estre continuée, nous essayrons de la pousser iusques où Dieu nous donnera la force de la conduire.

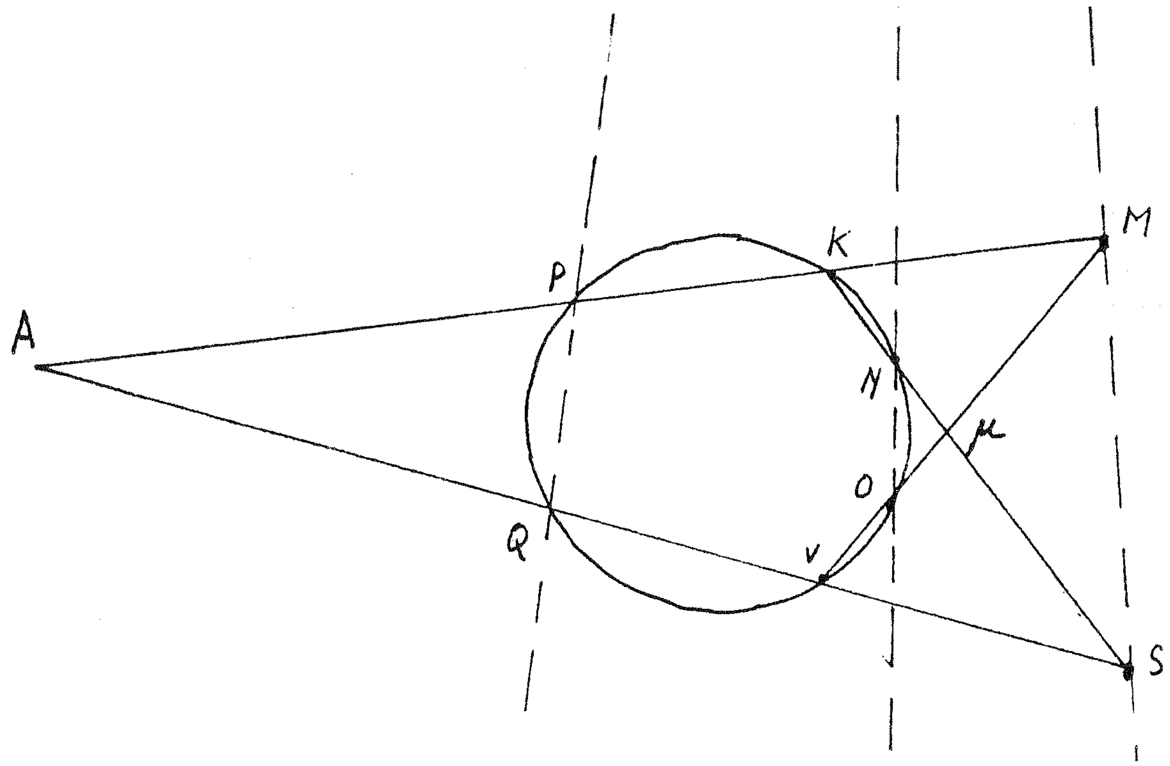
A PARIS, M. DC. XL.

Pascal's Essay pour les coniques [1640] ; facsimile overgenomen uit de Vries [1926] 1 t.o.p. 4.

manuscript is verloren gegaan. We weten daarom niet hoe hij zijn stelling bewezen heeft. Het ligt echter voor de hand dat hij de stelling eerst voor het geval van de cirkel heeft bewezen met behulp van de stelling van Menelaus, en vervolgens door projektie heeft uitgebreid tot kegelsneden in het algemeen; de stelling betreft namelijk incidentie en kollineariteit, en dat zijn projektief invariante eigenschappen.

De stelling

Hieronder geef ik een vertaling en uitleg van Pascal's lemma (voor de oorspronkelijke tekst zie de facsimile, i.h.b. figuur 1 die hieronder opnieuw getekend is voor een cirkel).



Vertaling

Lemma 1. Als in het vlak MSQ twee rechten MK en MV uit M vertrekken en twee rechten SK en SV uit S, en als K het snijpunt is van de rechten MK en SK, en V het snijpunt van de rechten MV en SV, en A het snijpunt der rechten MA en SA, en μ het snijpunt der rechten MV en SK, en als door twee van de vier punten A K µ V die niet op één rechte liggen met de punten M en S, zoals de punten K en V, een cirkelomtrek gaat die de rechten MV, MP, SV, SK in punten O, P, Q, N snijdt, ik zeg dat dan de rechten MS, NQ en PQ van de zelfde orde zijn.

("Van dezelfde orde zijn" betekent, zie definitie 1, òf konkurrent òf evenwijdig zijn - Desargues gebruikte hiervoor de term "van dezelfde ordonnantie".)

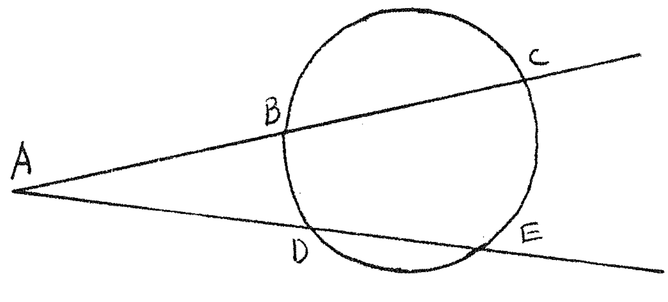
Uitleg

De zes punten op de cirkel zijn K, M, O, V, Q, P; snijpunten van overstaande zijden van de zeshoek zijn: M = KP ∩ OV, S = = KN ∩ QV en ON ∩ PQ (= Z, niet getekend). Pascal konkludeert dat ON, PQ en MS door één punt gaan, wat wil zeggen dat M, S en Z op één rechte liggen; dat laatste is wat de stelling in zijn moderne vorm uitspreekt.

Bewijs

De Vries ([1926], pp. 9-10) geeft een bewijs van de stelling dat hij aan Gergonne ontleent en dat middelen gebruikt die Pascal ook ter beschikking stonden. Dat bewijs volgt hieronder.

We gebruiken de stelling van Menelaus (zie het stuk over Desargues) en de machtsstelling. Die laatste zegt dat als twee



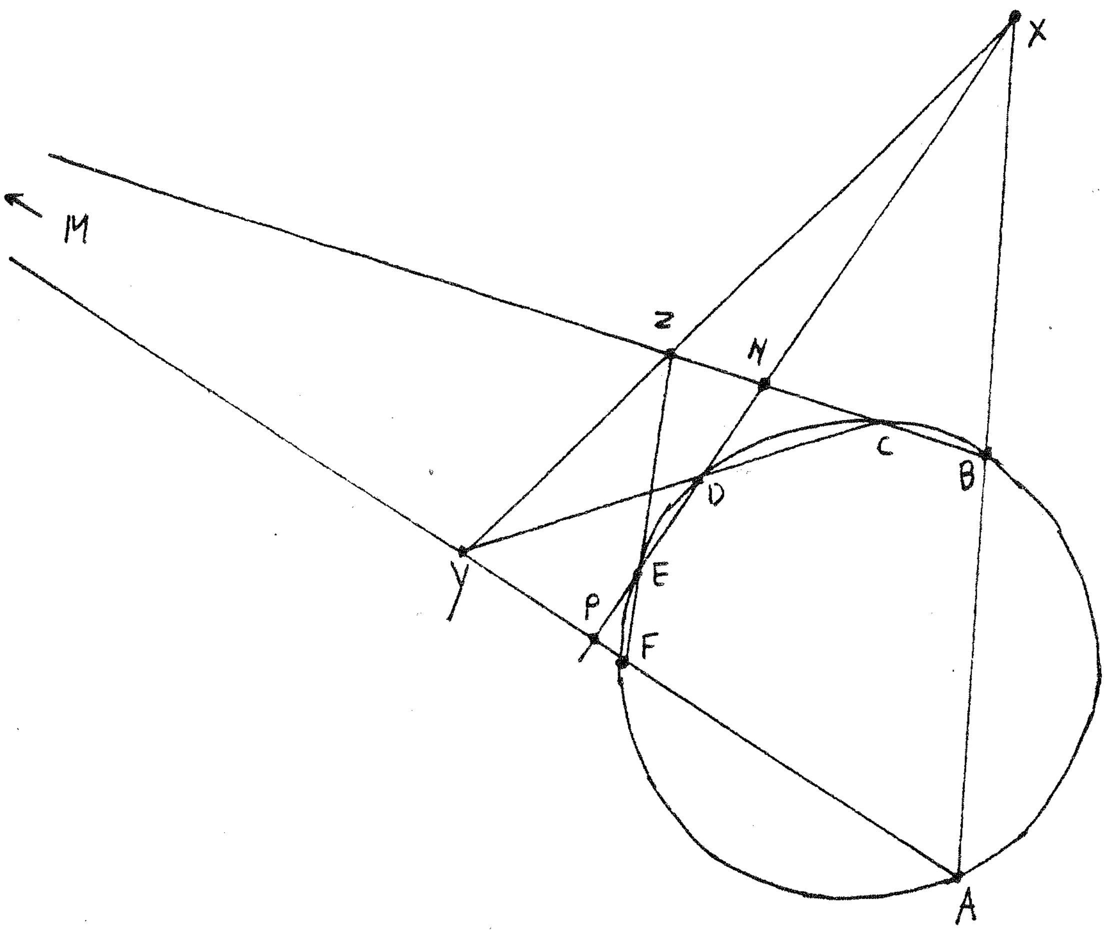
lijnen door een punt A een cirkel snijden in punten B, C respektievelijk D, E, geldt

$$AB.AC = AD.AE.$$

(De stelling wordt bewezen in Euclides' Elementen boek III prop. 35-37).

Laten nu A, B, C, D, E, F 6 punten op een cirkel zijn en laat

$BC \cap DE = N$	$AB \cap DE = X$
$DE \cap FA = P$	$BC \cap EF = Z$
$FA \cap BC = M$	$CD \cap FA = Y$



De machtsstelling vanuit de punten M, P, N levert

$$MP.MC = MA.MF$$
$$ND.NE = NC.NB$$
$$PF.PA = PE.PD$$

De zijden AB, CD, EF zijn transversalen van Δ MNP; we kunnen dus driemaal de stelling van Menelaus toepassen:

(AB:) MA.PX.MB = MB.NX.PA
(CD:) MY.PD.NC = MC.ND.PY
(EF:) MF.PE.NZ = MZ.NE.PF

We vermenigvuldigen alle linkerleden van de zes vergelijkingen, stellen het produkt gelijk aan dat van de rechterleden en strepen weg wat er weg te strepen valt; er blijft over:

MY.PX.NZ = MZ.NX.PY,

waaruit, vanwege de stelling van Menelaus, volgt dat X, Y en Z op één rechte liggen, hetgeen te bewijzen was.

Verdere geschiedenis van de stelling van Pascal

Zoals gezegd kwam Pacal er niet toe het geplande werk over kegelsneden te publiceren. Toen hij stierf was er een vrij uitgebreid maar niet voltooid handschrift van. G.W. Leibniz (1646--1716) heeft dat handschrift later ingezien, daarna is het verloren gegaan. Leibniz heeft het eerste hoofdstuk gekopieerd en uit de rest losse aantekeningen gemaakt. De kopie en de aantekeningen zijn voor het eerst in 1779 gepubliceerd.

Het blijkt uit Leibniz' aantekeningen dat hoofdstuk II van Pascal's geschrift gewijd was aan de stelling. Pascal sprak van een "hexagramma mysticum" (mystieke zeshoek) en bij zijn bewijs gebruikte hij projekties. Hij wilde de stelling als basis voor kegelsnedentheorie gebruiken. Hoe hij de stelling bewees en verder gebruikte blijkt niet uit Leibniz' aantekeningen: we weten dat dus niet.

Het Essay pour les coniques zelf kreeg weinig aandacht in de jaren na 1640; 18e eeuwse wiskundigen kenden het stuk niet. De stelling is verscheidene malen herontdekt, ondermeer door C. MacLaurin (1698-1746) in 1727, W. Braikenridge (1700-1762) in 1733 en R. Simson (1687-1768) in 1735. Nadat in 1779 het Essay opnieuw verschenen was en Leibniz' aantekeningen bekend waren geworden, heeft vooral Poncelet op Pascal's verdiensten gewezen. Daarvóór al had Brianchon in 1806 de duale van de stelling afgeleid. Na 1800 was de stelling dan ook goed bekend en vele meetkundigen hebben hem in hun studies over kegelsneden gebruikt.

6. Tenslotte

Wat opvalt in de geschiedenis van de drie besproken stellingen is hoe sterk het belang van stellingen bepaald wordt door de kontekst waarin ze passen. Er waren in dit geval drie aspekten van die kontekst die aan de stellingen hun belang verleenden. Dat waren: de interesse in projektief invariante eigenschappen, de invoering van punten "in het oneindige" en de aandacht voor de syntetische-axiomatische opbouw van de meetkunde.

Hoe de stelling van Pappus in de kontekst van Euclides' Porismen paste weten we niet maar het lijkt waarschijnlijk dat daar wel een interesse voor projektief invariante eigenschappen heeft gespeeld. Van invoering van punten "in het oneindig" was echter geen sprake; Pappus behandelde steeds de gevallen van evenwijdigheid apart. Het zou ook wel verbazend zijn geweest als Griekse wiskundigen punten in het oneindig hadden ingevoerd omdat zij in het algemeen redeneringen over oneindigheid vermeden.

Bij Desargues en Pascal waren die oneindig verre punten er wel, samen met een expliciete interesse in projektief invariante eigenschappen. Toch is hun aanzet tot een projektieve meetkunde niet door anderen opgenomen. Een gedeeltelijke verklaring daarvan ligt in het feit dat in de 17e eeuw, door het succes van de pas ontwikkelde analytische meetkunde, de aandacht voor een syntetisch-axiomatische opbouw van de meetkunde gering was. Die aandacht kwam pas weer op rond 1800 en we zien dan ook dat in de 19e eeuw geleidelijk de kontekst gekreëerd werd waarin het belang van de stellingen van Pappus, Desargues en Pascal onderkend kon worden.

Bibliografie

HILBERT, D.

[1899] Grundlagen der Geometrie Leipzig 1899 (vele latere drukken)

HULTSCH, F. zie PAPPUS [1876]

PAPPUS

[1876] Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt (-) edidit (-) Fridericus Hultsch Berlin 1876-1878 (3 vols)

[1933] La collection mathématique (tr. P. Vereecke) Paris 1933

PASCAL, B.

[1640] Essay pour les coniques Paris 1640 (tekstuitgave in Pascal [1954] pp. 60-63; facsimile in de Vries [1926] vol 1 t.c.p. 4)

[1954] Oeuvres complètes (ed. J. Chevalier) Paris 1954

PONCELET, J.-V.

[1822] Traité des propriétés projectives des figures Paris 1822 (2e ed. 1865-66)

PRANGER, M.

[1982] "De stelling van Desargues" (afstudeerskriptie, Math. Inst. R.U. Utrecht) 1982 (70 pp.)

SCHELLEKENS, G.J.

[1981] Klassieke projektieve meetkunde (diktaat, off-set van manuscript) Utrecht (Math. Inst. der R.U.) z.j. (ca. 1981)

TATON, R.

[1951] L'oeuvre mathématique de G. Desargues Paris 1951

VEREECKE, P. zie PAPPUS [1933]

VRIES, Hk de

[1926] Historische studiën Groningen 1926-1940 (3 vols).