Huygens et la France
(Paris, Vrin, 1981, p. 115-122)

L'ÉLABORATION DU CALCUL INFINITÉSIMAL, HUYGENS ENTRE PASCAL ET LEIBNIZ

par H.J.M. BOS
(Université d'Utrecht)

La seconde moitié du XVII^e siècle est une période très mouvementée dans le développement du calcul infinitésimal, car elle a vu, après les efforts des derniers précurseurs, la découverte du calcul différentiel et intégral par Newton et Leibniz. Plusieurs méthodes infinitésimales y furent développées, méthodes limitées qui ne s'appliquaient qu'à des problèmes spéciaux ou à des courbes spéciales - car il s'agit toujours au XVII^e siècle des théories « pour l'intelligence des lignes courbes », pour citer les mots du marquis de L'Hôpital.

Huygens, dont l'œuvre mathématique appartient à cette période, s'est engagé activement dans l'étude des problèmes des mathématiques infinitésimales. Dans les années 1650, il a publié des études dans un style archimédien classique sur les quadratures et les centres de gravité de segments de sections coniques. Ses travaux très intéressants sur la rectification des courbes et la détermination des surfaces des solides de révolution datent de 1658. Huygens publia ces résultats (mais non ses méthodes) , en 1673, dans l'*Horologium oscillatorium.* La théorie des développées, datant de 1659, fut elle aussi publiée en 1673, mais dans ce cas particulier, Huygens exposa également ses méthodes. Il y a de plus des études de 1661 sur la courbe logarithmique auxquelles se rattachent des travaux ultérieurs sur le problème de la chute des corps dans un milieu résistant.

Des années 1662 et 1663 datent des études dans lesquelles Huygens développe une règle générale pour déterminer les tangentes aux courbes algébriques, c'est-à-dire aux courbes qui ont une équation algébrique. Cette règle est équivalente à celles de Fermat et de Sluse. Huygens l'a présentée à l'Académie en 1667, mais elle n'a été publiée qu'en 1693. Dans les années 1680, Huygens, avec Fatio de Duillier, a essayé de découvrir des méthodes générales pour résoudre les problèmes inverses des tangentes (ce sont des problèmes où il s'agit de déterminer une courbe dont une propriété des tangentes est donnée), mais sans succès.

Vers 1690, Huygens a aussi étudié les problèmes qui en cette période étaient discutés par les utilisateurs du nouveau calcul différentiel et intégral, par exemple ceux de la chaînette, de la tractrice, et de la courbe isochrone. Huygens a consacré de petits articles à certaines de ces questions, mais en ne donnant le plus souvent que ses résultats. En dehors de la théorie des développées, beaucoup de ces résultats étaient très classiques ; d'autres ne furent publiés que tardivement et très partiellement. De ce fait, bien que la liste des résultats obtenus par Huygens en mathématiques infinitésimales soit impressionnante, ce n'est pas une telle liste qui pouvait lui valoir aisément une place dans les annales de l'histoire. Aussi, dans la plupart des études historiques sur l'élaboration du calcul infinitésimal, Huygens n'est guère mentionné que pour avoir conseillé en 1673 à Leibniz de lire, entre autres, les *Lettres de A. Dettonville* sur la cycloïde[1], lui permettant ainsi de trouver dans ces écrits de Pascal le célèbre «triangle caractéristique» auquel il accorda ensuite une place centrale dans son calcul différentiel.

Si le rôle, en quelque sorte anecdotique, ainsi attribué à Huygens à ce sujet, ne fait pas véritablement droit à ses trouvailles en calcul infinitésimal, il suggère toutefois une comparaison intéressante, celle de situer Huygens entre Pascal et Leibniz. Cette comparaison que je voudrais évoquer dans cette communication nous conduit directement vers deux thèmes auxquels je puis relier deux exemples tirés de l'œuvre de Huygens et quelques remarques plus générales : il s'agit d'une part du « triangle caractéristique » et d'autre part de la généralité des méthodes.

En ce qui concerne le triangle caractéristique, l'histoire en est bien connue[2]. Leibniz trouve chez Pascal une figure (fig.1, p. 117), formée d'un quart de cercle, avec, en un point c sur son arc, le petit triangle def formé par la tangente en c et deux côtés parallèles aux axes (c'est le triangle caractéristique de la courbe en ce point c). Pascal utilise le fait que ce triangle est semblable au triangle cBb formé par l'ordonnée bc, le rayon Bc du cercle et la partie Bb de l'axe horizontal.

Ce que Leibniz remarque ici, c'est que cette similitude et la manière dont Pascal en fait usage ne sont pas limitées au cas du cercle mais s'appliquent à toute courbe (voir fig.2, p. 117), en substituant la normale cm à la courbe au rayon du cercle utilisé par Pascal.

Or, il est remarquable que le triangle caractéristique, de même que cet usage plus général que Leibniz en fait, se trouve déjà dans un écrit[3] de Huygens datant de 1658 (donc un peu antérieur à l'étude de Pascal) sur les aires des surfaces engendrées par la révolution de courbes planes.

Voici les points essentiels de cette application (voir fig.3, p. 117). Huygens se figure un corps formé par la révolution d'une courbe autour de l'axe AB. Il dessine des petites parties de des tangentes et il sait que l'aire de la bande décrite par la partie de de la tangente est égale à $2\pi cb \mathrm{x} de$

L'aire totale est donc donnée par la somme de ces bandes :

$$\text{Aire} = 2\pi \Sigma \; cb \mathrm{x} de$$

(le facteur 2π qui figure dans les formules correspond au fait que Huygens compare ces surfaces avec celle d'un cercle).

Huygens applique ensuite la similitude du triangle caractéristique def (voir fig.4, p. 117), avec le triangle formé par l'ordonnée bc, la normale cm et la partie bm sur l'axe :

$$\triangle \; def \sim \triangle \; cmb,$$

et il trouve que

$$cb \mathrm{x} de = cm \mathrm{x} df.$$

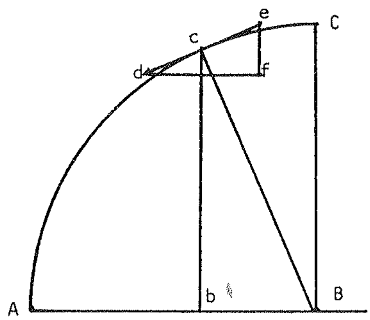

Fig. 1.

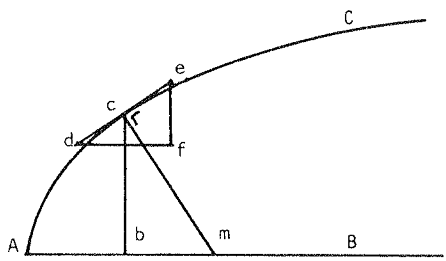

Fig. 2.

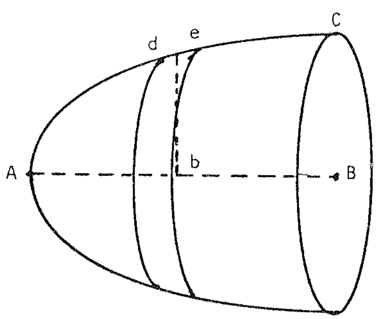

Fig. 3.

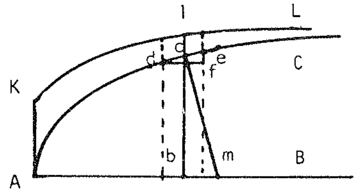

Fig. 4.

La somme cherchée devient alors

$$2\pi\,\Sigma\, cmxdf,$$

et peut être interprétée comme l'aire située en-dessous d'une nouvelle courbe KL définie par

$$bl = cm.$$

Cette nouvelle courbe peut être obtenue grâce aux méthodes connues à cette époque pour déterminer les normales ou les tangentes aux courbes algébriques. De cette manière, Huygens peut déterminer l'aire de la surface de révolution dans le cas où la courbe AC est une section conique, car la nouvelle courbe KL se détermine alors facilement.

Ce qui est surprenant ici, c'est que la généralité dans l'usage du triangle caractéristique, généralité que Leibniz a retrouvée après la lecture de l'exemple particulier de Pascal, est déjà clairement présente dans cette étude de Huygens[4]. L'usage que Leibniz comprit que l'on pouvait faire de cette figure fondamentale y est déjà parfaitement réalisé.

En effet, cet usage ne réside pas seulement dans le fait qu'avec le triangle caractéristique on peut trouver les tangentes - ce qui est une chose triviale. L'importance véritable de ce triangle réside en ce qu'il nous permet de transformer certaines aires, certaines quadratures en d'autres. C'est ainsi que l'aire inconnue de la surface de révolution est transformée par Huygens en une aire située en - dessous d'une nouvelle courbe, le problème se trouve résolu lorsque cette dernière aire est connue - ce qui, en fait, arrive assez fréquemment.

On peut donc légitimement se demander quelles notions ne figurant pas dans cette étude de Huygens, Leibniz a pu tirer de sa trouvaille dans l'œuvre de Pascal. Or, Leibniz pensait qu'il serait possible de trouver d'autres transformations[5] d'aires à l'aide de ce triangle caractéristique. A ce moment-là également (c'était en 1673), Leibniz avait élaboré l'idée d'un calcul général concernant les problèmes relatifs aux courbes, et il se rendait compte qu'un tel calcul devait permettre de représenter de telles transformations d'aires sous forme de formules. De ce fait, les transformations d'aires à l'aide du triangle caractéristique constituèrent une épreuve cruciale pour son nouveau calcul. Et cette épreuve fut positive[6].

Par contre, les pensées de Huygens ne s'orientèrent pas dans une telle voie de généralité. Quoiqu'il ait eu la notion fondamentale et générale de triangle caractéristique, il ne se proposa ni de trouver d'autres transformations analogues, ni de découvrir une symbolique ou un calcul. Fait bien caractéristique : après avoir trouvé ces résultats, Huygens, en 1658, se demanda comment ces derniers pouvaient être démontrés dans un style rigoureux, classique, archimédien. Et, trait tout aussi caractéristique, il conclua que cela serait possible, mais que cela devrait prendre beaucoup de temps, et bien vite, sans plus approfondir, il s'intéressa à d'autres problèmes, perdant tout intérêt à l'égard de celui-ci.

Cette remarque nous mène au second thème dont je veux parler : la généralité des méthodes. Dans ses études sur la cycloïde, Pascal a développé nombre de notions et de termes généraux pour l'étude des aires comprises sous des courbes, de leurs centres de gravité et des problèmes qui s'y rattachent. P. Costabel a montré, dans une étude très importante[7], comment la structure du traité pascalien résulte de circonstances diverses : la compétition sur la cycloïde, les dates de clôture, les informations sur les résultats d'autres savants. Si Pascal avait disposé de plus de temps, peut-être son œuvre sur la cycloïde aurait-elle été tout à fait différente, et peut-être en ce cas Leibniz n'aurait pas trouvé le triangle caractéristique dans les *Lettres* pascaliennes. Toutefois, il est peu probable que le souci de généralité dans l'œuvre de Pascal eut été bien différent ; cette généralité, il faut le dire, était recherchée dans une direction bien typique de l'esprit de Pascal. Bien qu'il n'ait été intéressé ni par le formalisme algébrique, ni par le problème des tangentes, ce dernier a su en effet élaborer un langage mathématique très général, constitué de termes et de notions. Comment Huygens a-t-il jugé le style de Pascal ? Il admirait très hautement son œuvre - ses lettres en témoignent - , mais c'est plutôt la subtilité des études de Pascal que leur ordre et leur généralité que Huygens admire. C'est ainsi qu'il écrit à Carcavy :

> « J'admire de plus en plus la subtilité des escrits de Monsieur Dettonville, mais il faut avouer que c'est un labyrinthe lors que l'on veut faire la construction de quelque problème[8]. »

Voilà une chose caractéristique de l'esprit de Huygens. Pour lui c'est la construction, c'est-à-dire la résolution des problèmes qui est le but final. Lorsque Huygens a essayé de développer des méthodes générales, ce n'est pas dans des directions nouvelles, mais en cherchant cette généralité dans les formules algébriques de la géométrie cartésienne. Sa règle pour les tangentes et sa règle pour les développées, pour autant qu'elle est basée sur la précédente, s'appliquent seulement aux courbes qui ont une équation algébrique, fait qui limite évidemment leur généralité, puisqu'il y a des courbes (nos courbes transcendentes) dont l'équation n'a pas ce caractère.

Etant donné ces différences de style, il est d'autant plus étonnant que Huygens ait été capable de résoudre, avec ses propres méthodes, la plupart des problèmes qui furent posés vers 1690 par les mathématiciens partisans des nouvelles méthodes générales, comme Leibniz, L'Hôpital et les Bernoulli. Le contraste entre la façon avec laquelle Huygens aborde ces problèmes et les nouvelles méthodes du calcul différentiel et intégral y apparaît très clairement et je voudrais l'illustrer par un exemple. Dans ce but, j'ai choisi de décrire la solution donnée par Huygens au problème de la courbe *isochrone*, proposé par Leibniz vers 1687[9]. A. Heinekamp l'a déjà mentionné en indiquant les aspects philosophiques de cette question, sur lesquels je ne reviendrai pas.

Leibniz demandait quelle est la forme d'une courbe telle qu'un corps tombant le long de cette courbe (située dans un plan vertical) approche de la ligne horizontale avec une vitesse constante (fig.5,p. 119), autrement dit de telle sorte que la composante verticale de la vitesse soit constante.

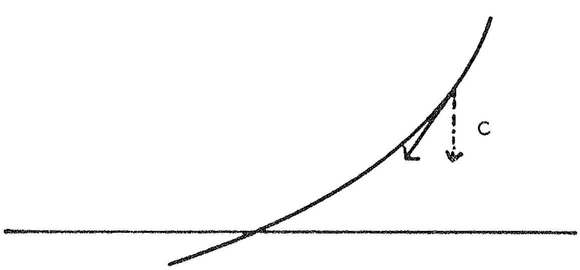

Fig. 5.

Soulignons que c'est un problème d'un type spécial. Il ne s'agit en effet ni de déterminer une tangente, ni de calculer une aire comprise sous une courbe donnée - problèmes équivalents, le premier à la différentiation, le second à l'intégration. Il s'agit ici d'un problème où la courbe n'est pas donnée mais doit être trouvée, c'est-à-dire d'un problème plus difficile, équivalant à une équation différentielle, et ce sont des questions de ce type qui, dans les dernières années du XVII^{e} siècle, ont servi d'exemples pour tester les méthodes nouvelles et anciennes.

Je ne veux pas entrer dans le détail de la solution[10] donnée par Huygens au problème de la courbe isochrone, mais seulement caractériser son style qui était tout à fait différent de celui du nouveau calcul différentiel et intégral. Pour cela, je parcourrai cette solution d'une manière plus ou moins phénoménologique.

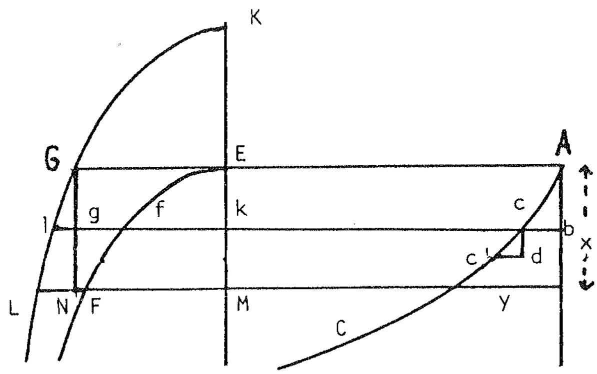

Fig. 6.

Soit (fig.6, p. 120) AC la courbe cherchée. Il faut tout d'abord connaître la vitesse d'un corps tombant le long de cette courbe. La loi de la chute des corps de Galilée donnant cette vitesse, Huygens la représente dans la figure par une parabole KL ; c'est à dire que KL représente la vitesse atteinte par le corps en c.

Huygens tire ensuite des données du problème - à savoir que la composante verticale de la vitesse est constante - que, dans le triangle caractéristique $c'cd$, on a

$$cd : cc' = kg : kl,$$

où kg est constante, égale à GE. Mais au lieu de cette proportion $cd : cc'$, il faut plutôt connaître la proportion $cd : dc'$. Pour cela, Huygens forme une deuxième parabole EF de même forme que KL et prouve que

$$cd : dc' = kg : kf.$$

Finalement, il s'agit de trouver la relation entre l'abscisse $AB = x$ et l'ordonnée $bc = y$ de la courbe cherchée (notons que c'est ici seulement, que Huygens introduit les x et les y). De la relation entre les côtés du triangle caractéristique, il déduit que

$$x : y = \text{aire } GEMN : \text{aire } EFM.$$

L'aire parabolique EFM étant connue, Huygens transforme cette relation en termes algébriques et obtient l'équation de la courbe cherchée :

$$\frac{9}{4} a\, y^2 = x^3,$$

c'est à dire une parabole cubique.

Cet exemple montre bien les caractéristiques du style huygenien. Toutes les relations entre grandeurs y sont indiquées ou découvertes dans la figure. Dans le cours du raisonnement, n'interviennent pas de formules algébriques, seulement des proportions. Les formules n'apparaissent qu'à la fin.

Par contre, dans la méthode du calcul différentiel et intégral, tous ces raisonnements peuvent être traduits par des formules sans l'intervention de figures, la solution du problème se présentant alors sous forme d'une série de six ou sept formules simples.

Or il est important de noter que Huygens était à cette époque - ainsi qu'en témoignent ses manuscrits - parfaitement capable d'établir une pareille version algébrique de son raisonnement géométrique[11]. Mais cette méthode, qui nous semble tellement plus naturelle et aisée, ne lui paraissait pas meilleure que sa version géométrique.

Huygens était un maître de cette manière géométrique de penser. Son travail apparaît comme le point culminant de ce style et, en même temps, comme sa limite, car, par la suite, les problèmes sont devenus si compliqués que cette méthode géométrique n'était plus praticable.

Avec ces quelques remarques très schématiques et avec cette comparaison très rapide de l'œuvre de ces trois grands mathématiciens, Pascal, Huygens et Leibniz, j'espère avoir pu clarifier quelque peu la méthode et le style de Huygens dans le domaine de la mathématique infinitésimale.

NOTES

1. B. Pascal, *Lettres de A. Dettonville contenant quelques-unes de ses inventions de géométrie,* Paris, 1659.

2. Voir par exemple J. E. Hofmann, dans *Leibniz in Paris 1672-1676,* Cambridge, 1974, p. 48-49.

3. *Œuvres,* t. XIV, p. 314-346, spécialement p. 314.

4. En effet, le même usage général du triangle caractéristique se trouve dans la fameuse lettre de H. Van Heuraet sur la rectification des courbes « Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas», publiée dans l'édition de 1659 de la *Geometria* de Descartes. Pour les contacts entre Huygens et Heuraet pendant les années 1657-1659 où tous deux étudièrent, le plus souvent indépendamment, des problèmes de rectification et de coplanation, voir *Œuvres,* t. XIV, p. 188-197.

5. Notamment la « Transmutation » ; voir J. E. Hofmann, dans *Leibniz in Paris,* p. 54-62.

6. En symbolisme leibnizien, la transformation dont Huygens fait usage s'écrit comme suit : $\int yds = \int ndx$ où (voir les fig.2 et 4) $Ab = x$, $bc = y$, l'arc $Ac = s$ et $cm = n$.

7. P. Costabel, « Essai sur les secrets des *Traités de la Roulette* » dans l'*Œuvre scientifique de Pascal,* Paris, 1964, p. 169-206.

8. *Œuvres,* t. II, p. 411.

9. Leibniz proposa le problème dans son article « Réponse de M. L. ...» dans les *Nouvelles de la République des Lettres* de sept. 1687.

10. Huygens publia sa solution dans un article « Solution du problème... » des *Nouvelles de la République des lettres,* d'oct. 1687. Cet article ne précise pas la méthode par laquelle Huygens est arrivé à la solution. Cet article et la méthode correspondante sont publiés dans les *Œuvres,* t. IX, p. 224-228.

11. C'est ce qui émane d'un calcul manuscrit de Huygens dans les *Œuvres,* t. IX, p. 229.