

College Geschiedenis van de Wiskunde

Docent: H.J.M. Bos

1995-1996 — eerste Semester

Organisatorische Zaken

Tijd en Plaats

Woensdagen 11.00-12.45, Zaal K 11, Wiskunde gebouw. — Eerste college 6 September, laatste college 13 December.

Vereisten

De vereisten voor een voldoende beoordeling zijn:

- College volgen.
- Schriftelijk uitvoeren van drie opdrachten.
- Scriptie schrijven.

De Opdrachten

Opdracht I, “Bronnen”, wordt op college (13 September) gedaan (en zo nodig thuis afge maakt). Opdracht II, “Oriëntatie”, wordt buiten college tijd gedaan. Opdracht III, “Oude Boeken”, wordt gedaan in de Universiteitsbibliotheek. De opgave- en inleverdata van de opdrachten staan in het programma hieronder. Voor opdrachten I en III kan in groepen (hooguit 3) worden samengewerkt; opdracht II moet individueel worden uitgevoerd.

De Scriptie

Een tentamen wordt niet afgenomen; in plaats daarvan komt de scriptie. De scriptie kan individueel of in samenwerking met anderen (groep niet groter dan 3) worden geschreven. Ik verwacht dat studenten zelf contact met mij opnemen om, in overleg, een onderwerp te kiezen. Die keuze wordt bepaald tijdens een gesprek. Ik probeer dan met voorkeuren rekening te houden. Het is dus nuttig, maar niet noodzakelijk, dat men van te voren wensen en voorkeuren overdenkt. De afspraak wordt schriftelijk vastgelegd. Het scriptie- onderwerp moet uiterlijk 29 November zijn vastgelegd. Van de deelnemers wordt verwacht dat zij de handleiding “Scriptie Schrijven” gelezen hebben (verkrijgbaar bij de administratie) en alleen met gegronde reden daarvan afwijken. Als de scriptie klaar is kijk ik hem na en bespreek hem met de schrijver(s) (zie onder beoordeling). De scriptie vervangt een tentamen. Men kan de scriptie uitbreiden tot een scriptie zoals bedoeld op blz. 27 van de studiegids, maar dat moet dan wel van te voren worden afgesproken, er worden dan namelijk zwaardere eisen gesteld.

Beoordeling

De opdrachten en de scriptie worden met een cijfer beoordeeld. Het eindcijfer wordt bepaald volgens:

$$\frac{\text{cijfer}_{\text{opdr. I}} + \text{cijfer}_{\text{opdr. II}} + \text{cijfer}_{\text{opdr. III}} + 3 \times \text{cijfer}_{\text{scriptie}}}{6} \quad (\text{afgerond}) .$$

De cijfers worden als volgt bepaald: Als aan de vastgelegde afspraak voor opdracht of scriptie is voldaan is het werk voldoende (6). Vervolgens wordt gekeken naar: a) ordening en presentatie, en b) eigen speur- en denkwerk. Beide aspecten leveren bij positieve beoordeling een extra punt op. Boven de 8 zijn er geen regels. Bij onvoldoende beoordeling geef ik een aanvullende opdracht.

Dictaat

Er wordt, in afleveringen, een dictaat uitgedeeld. Dit dictaat betreft niet het gehele college. Bij gedeelten van de stof moet tijdens het college dictaat opgenomen worden. Ik zal in die gevallen waarschuwen. Prijs van het uitgedeelde dictaatmateriaal: f. 15.–, te voldoen bij de eerste uitreiking.

Verdere hulpmiddelen

- Een literatuurlijst die boeken vermeldt over geschiedenis van de wiskunde aanwezig in de M.I. bibliotheek. De lijst wordt in September uitgedeeld als onderdeel van het dictaat.
- De scriptiecollectie; de tot nu toe geschreven scripties zijn opgeborgen in een hangmappenkast op de kamer op de zevende verdieping waar het fotokopieerapparaat staat. Ze kunnen door de deelnemers ingezien en geleend worden.
- De handleiding “Scriptie Schrijven”; verkrijgbaar bij het secretariaat voor f 2.50.
- Bij opdracht I wordt tekstmateriaal uitgedeeld, dit moet na afloop weer ingeleverd worden.

Boeken

De deelnemers wordt aangeraden om ten minste één algemeen overzichtswerk over de Geschiedenis van de Wiskunde aan te schaffen. Goede keuzen daarvoor zijn:

- Boyer, C.B., *A history of mathematics* (2nd ed. rev. by Uta C. Merzbach), New York etc. (Wiley), 1968.
- Burton, D.M., *The history of mathematics*, Boston etc. (Allyn and Bacon), 1985.
- Katz, Victor J., *A history of mathematics; an introduction*, New York (Harper, Collins), 1993.
- Kline, M., *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York (Oxford University Press), 1972.
- Struik, D.J., *Geschiedenis van de Wiskunde*, Utrecht (Spectrum), 1990. (Er bestaan ook Engelse en Duitse versies van dit boek).

Bereikbaarheid

Ik ben voor afspraken met enige regelmaat bereikbaar op mijn kamer, nr 704, in het M.I.; telefoon 531432. Bij afwezigheid briefje achterlaten op m'n bureau of in m'n postvak. Eventueel mij thuis bellen: 030-884808. (N.B. Ik ben vaak afwezig dus aarzel niet met briefje of telefoon.)

Henk Bos

*Noot, toegevoegd door Jan Hogendijk, februari 2024:
de opdrachten,, literatuurlijst en het document scriptie schrijven staan in aparte pdf files
te bekijken via
<https://www.jphogendijk.nl/bos.html>
bij ongepubliceerde Nederlandse teksten (NU1995).*

Programma

1. (*6 Sep.*) Inleiding, overzicht (deel A, 1-4)
2. (*13 Sep.*) Opdracht I, “Bronnen”
3. (*20 Sep.*) Thema 1 (uit Babylonische wiskunde) — college door Dr Jan P. Hogendijk
4. (*27 Sep.*) Thema 2 (uit Griekse wiskunde)
Inleveren opdracht I
5. (*4 Oct.*) Thema 2
Opgave opdracht II “Oriëntatie”
6. (*11 Oct.*) Overzicht (deel A, 5-7)
7. (*18 Oct.*) Thema 3
Inleveren opdracht II
8. (*25 Oct.*) Thema 3
9. (*1 Nov.*) Thema 3
10. (*8 Nov.*) Opdracht III “Oude Boeken”
College in de Universiteitsbibliotheek (Wittevrouwenstraat 7-11, Utrecht)
11. (*15 Nov.*) Overzicht (deel A, 8-9)
12. (*22 Nov.*) Thema 4
Inleveren opdracht III
13. (*29 Nov.*) Thema 4
Onderwerp van de scriptie moet vastgesteld zijn
14. (*6 Dec.*) Overzicht (Deel A, 10-12)
15. (*13 Dec.*) Slot

Geschiedenis van de Wiskunde

Deel A

Korte Overzichten van Periodes

Contents

1	Wiskunde in Prehistorische en Primitieve Culturen	7
2	Egyptische Wiskunde	7
3	Babylonische Wiskunde	8
4	Griekse Wiskunde	10
5	Wiskunde in het Verre Oosten	12
6	Wiskunde binnen de Islamitische Cultuur	14
7	Wiskunde in de Middeleeuwen in Europa	15
8	Wiskunde in de Renaissance	16
9	Wiskunde in de 17e Eeuw	18
10	Wiskunde in de 18e Eeuw	20
11	Wiskunde in de 19e Eeuw	21
12	Wiskunde in de 20e Eeuw	24
1	Incommensurabele Grootheden en Irrationale Verhoudingen in de Griekse Wiskunde	28
2	Descartes over de normaal aan de ellips (door J.A. van Maanen)	42
3	Leibniz en de Differentiaal- en Integraalrekening	50
4	Thema's uit mijn onderzoek	63
5	Algebraïsche vergelijkingen en Galois-theorie, een historisch overzicht	81

1 Wiskunde in Prehistorische en Primitieve Culturen

Plaatsing

Prehistorische culturen (d.w.z. culturen waarin het schrift niet of nog niet is uitgevonden); overall ter wereld. In Mesopotamië eindigt de prehistorische periode ca. 3500 vC; in andere streken veel later. Verder: primitieve culturen tot in deze tijd (Amerikaanse indianenstammen en sommige Afrikaanse volken bv.).

Algemeen

Sporen van wiskundige kennis bij prehistorische culturen zijn vooral te vinden in versieringen (op aardewerk bijvoorbeeld), waaruit vaak vergaand inzicht in eigenschappen van meetkundige figuren blijkt (driehoeken, vierkanten, zeshoeken, cirkels, spiralen etc., symmetrie- en patroon eigenschappen van deze figuren). Wat rekenen betreft zijn er minder sporen, maar er zijn tel-aantekeningen (kerven op botten bv.) gevonden.

Deze wiskundige kennis functioneerde bij versiering, symboliek, ritueel, en communicatie over aantallen. Bij verder ontwikkelde culturen (landbouw, centrale machtsstructuren, steden) werd wiskunde belangrijk in de maatschappelijke organisatie: inventariseren van goederen, organisatie van legers, kalenderberekeningen, bouw, verdeling van land.

Thema's

- Het beginnende getalbegrip, in het bijzonder de systemen van bundeling: 2-bundeling (verdubbelen), 5-bundeling (vingers), 10-bundeling en andere. Bij onderzoek hierover wordt ook gekeken naar telsystemen en telwoorden bij nu nog levende primitieve volken, en naar sporen van bundelingssystemen in de telwoorden van moderne talen.
- Het ontstaan en de vroege functie van wiskundige kennis in deze culturen, in het bijzonder de mogelijkheid van een rituele oorsprong van getalbegrip en meetkundig inzicht.

Problemen

Het grote probleem is de schaarste aan bronnenmateriaal en de moeilijkheid van interpretatie ervan. Verder is er het probleem wat onder wiskunde verstaan moet worden. Meestal wordt dit zeer ruim genomen: alles wat met getal, grootte en regelmatige vorm te maken heeft.

2 Egyptische Wiskunde

Plaatsing

Egypte (dal en delta van de Nijl), ca. 3000 vC - ca. 300 vC.

Algemeen

Over de Egyptische wiskunde weten we uit geschreven bronnen, inscripties, en een aantal papyrusrollen met wiskundige inhoud, waarvan de belangrijkste de zogenaamde “Papyrus Rhind” is. In Egypte is een ver uitgewerkte en karakteristieke rekentechniek ontwikkeld; op het gebied van de meetkunde had men regels voor het berekenen van oppervlakken en inhouden van een aantal figuren.

Egyptische wiskunde kende het begrip bewijzen niet; ook schijnt men niet een essentieel verschil tussen benaderende en exacte berekeningen gemaakt te hebben. De wiskunde was primair gericht op de praktijk (administratie, bouw, kalenderrekening, landmeten), maar werd ook als leervak onderwezen, waarbij meer theoretische problemen aan de orde kwamen.

Thema's

- Getalnotatie (10-delig).
- Breukrekenen, i.h.b. de rol van stambreuken (breuken met teller 1).
- Methoden voor vermenigvuldigen en delen gebaseerd op optellen en verdubbelen; het gebruik van tabellen daarbij, i.h.b. de $2/n$ tabel voor het verdubbelen van stambreuken.
- Regels voor oppervlaktebepaling (o.a. van trapezium) en inhoudsbepaling (o.a. van afgeknotte pyramide).
- Benadering van π .
- Sporen van algebraïsch denken (lineaire vergelijkingen).

Problemen

- De structuur van de $2/n$ tabel (vele hypothesen!).
- De oorsprong van de oppervlakte- en inhoudsregels.

3 Babylonische Wiskunde

Plaatsing

Ca. 3500 vC - 0, in Mesopotamië, d.w.z. de valleien van Eufraat en Tigris (tegenwoordig: Oost-Syrië, Irak, Zuid-Turkije en West-Iran). Sumerische cultuur tot ca. 2250 vC, daarna zijn veel Sumerische cultuurelementen geassimileerd in de Akkadische en andere latere overheersende culturen. Van ca. 2000 vC tot ca. 500 vC was Babylon (ten zuiden van het huidige Bagdad) het culturele centrum. Perzische overheersing van ca. 500 vC tot ca. 300 vC, daarna de Seleucidische periode.

Algemeen

Wiskundige teksten werden, zoals alle teksten in Mesopotamië, geschreven in spijkerschrift op kleitabletten. Er zijn veel wiskundige kleitabletten bewaard gebleven, die zijn nog lang niet allemaal ontcijferd.

Wiskundige kennis stond in Mesopotamië op een hoger peil dan in Egypte, vooral door het positionele stelsel van getalnotatie dat ca. 2000 vC vaste vorm kreeg. Het was een sexagesimaal (60-tallig) stelsel. De rekentechniek (in het bijzonder breukrekening en wortelbenaderingen) was ver ontwikkeld. Ook algebraïsche technieken (vierkantsvergelijkingen, derdegraads vergelijkingen, stelsels vergelijkingen) waren bekend, en er waren regels voor de berekening van oppervlakte en inhoud van zekere figuren.

Evenals de Egyptische kende de Babylonische wiskunde geen bewijzen, ook werd er geen consequent onderscheid gemaakt tussen benaderende en exacte berekeningen. Wiskunde werd veelal in verband met praktisch gebruik bedreven, in het bijzonder vergde de Babylonische astronomie veel wiskunde. Toch lijkt een gedeelte van de wiskunde (algebra) meer om theoretische redenen ontwikkeld te zijn.

Thema's

- Het 60-tallig stelsel: ontwikkeling der positionele notatie, eenduidigheid van de notatie, rol van de 0.
- Breukrekening: reciprokentabellen, reguliere getallen (d.w.z. getallen p waarbij $1/p$ een eindige sexagesimale breuk is) en irreguliere.
- Algebra: de vergelijkingen, het tablet "Plimpton 322" met een tabel van Pythagoreïsche drietallen (dat wil zeggen drietallen p, q, r met $p^2 + q^2 = r^2$).
- Meetkunde: oppervlakte en inhoud van figuren, rol van de stelling van Pythagoras.

Problemen

- Oorsprong van het 60-tallig stelsel.
- Motivatie van de algebraïsche teksten die niet met enige praktische problemen te maken lijken te hebben.
- Interpretatie van Plimpton 322 (zeer omstreden!).
- Opzet en berekeningswijzen van reciprokentabellen en vermenigvuldigingstabellen.
- Invloed op en uit Egypte (gering), invloed op Griekse wiskunde (direkt en via astronomie, maar moeilijk te bepalen).

4 Griekse Wiskunde

Plaatsing

Griekenland, Ionië (het huidige West Turkije), Zuid Italië, Noord Egypte (in het bijzonder Alexandrië). 600 vC - 600 nC. Zie verder de periodisering hieronder.

Algemeen

In Griekenland ontstond een ten opzichte van de voorgaande perioden totaal nieuwe vorm van wiskunde:

- Er werden geordende wiskundige theorieën uitgewerkt. Daarbij streefde men ernaar de theorie op te zetten als een reeks stellingen met bewijzen, afgeleid uit eerder bewezen stellingen en een klein aantal expliciet geformuleerde axioma's, alleen gebruik makend van strenge deductieve logica.
- Deze wiskunde was niet gericht op of geïnspireerd door praktische toepassing.
- Wiskundige vondsten en theorieën werden als persoonlijke prestatie onderkend; de namen van de betrokken wiskundigen bleven bij latere wiskundigen bekend. Bij de Griekse wiskunde hebben we voor het eerst met identificeerbare wiskundigen te doen.

De bovengenoemde karaktertrekken zijn in de huidige wiskunde nog steeds van belang; we kunnen de Griekse wiskunde daarom opvatten als de eerste moderne vorm van wiskunde. Overigens werd in de Griekse periode natuurlijk ook praktische wiskunde bedreven.

Onze informatie over Griekse wiskunde stamt voornamelijk uit:

- Bewaard gebleven wiskundige werken, vooral die van Euclides (in het bijzonder de *Elementen*) Apollonius, Archimedes en Diophantus;
- berichten en citaten uit vroegere werken in latere verzamelwerken (bijvoorbeeld van Pappus) of commentaren (bijvoorbeeld van Proclus op Euclides en van Eutocius op Archimedes en Apollonius).

Namen

In Tabel 1 staat een chronologisch geordende lijst van namen en data van de belangrijkste wiskundigen uit de Griekse periode. De gegevens zijn ontleend aan de *Dictionary of Scientific Biography* (ed. C.C. Gillispie, New York 1968-1980). De afkorting “fl.” (van Latijn “floruit”) betekent dat de periode van activiteit van de genoemde persoon vermoedelijk lag in de jaren rond de genoemde datum.

Thales	ca. 625 - ca. 547 vC	Nicomedes	fl. ca. 250 vC
Pythagoras	ca. 560 - ca. 480 vC	Archimedes	ca. 287 - 212 vC
Zeno	ca. 490 - ca. 425 vC	Eratosthenes	ca. 276 - ca. 195 vC
Theodorus	ca. 465 - na 399 vC	Apollonius	fl. ca. 200 vC
Hippokrates	fl. ca. 425 vC	Diocles	fl. ca. 150 vC
Democritus	fl. ca. 420 vC	Hipparchus	ca. 180 - na 127 vC
Theaetetus	ca. 417 - 369 vC	Heron	fl. ca. 60 nC
Plato	427 - 348/7 vC	Menelaus	fl. ca. 100 nC
Archytas	fl. ca. 375 vC	Ptolemaeus	ca. 100 - ca. 170 nC
Eudoxus	ca. 400 - ca. 347 vC	Diophantus	fl. ca. 250 nC
Menaechmus	fl. ca. 350 vC	Pappus	fl. ca. 325 nC
Aristoteles	384 - 322 vC	Hypatia	ca. 370 - 415 nC
Dinostratus	fl. ca. 350 vC	Proclus	ca. 410 - 485 nC
Euclides	fl. ca. 300 vC	Eutocius	fl. ca. 500 nC
Aristarchus	ca. 310 - 230 vC		

Tabel 1. Wiskundigen uit de Griekse Periode

Periodisering

De periode van de Griekse wiskunde, 600 vc - 600 nC, valt uiteen in deelperiodes:

600 - 500 vC. Beginperiode; Thales (Ionië) en Pythagoras (Zuid Italië); eerste ideeën over bewijzen.

500 - 400 vC. Wiskunde van de Pythagoreërs (centrum: Zuid Italië), het begrip getal (dat wil zeggen natuurlijk getal) staat centraal.

400 - 300 vC. Wiskunde ten tijde van Plato en Aristoteles. Centrum van activiteit: Athene. Belangrijke problemen waren: incommensurabele grootheden en het begrip oneindig.

300 - 200 vC. Hellenistische periode; centrum: Alexandrië (in Noord Egypte). Periode van Euclides, Archimedes en Apollonius, de eerste wiskundigen waarvan omvangrijke geschriften bewaard zijn gebleven. Centrale thema's: theoretische ordening van de meetkunde (Euclides), leer der kegelsneden (Apollonius), uitwerking van infinitesimale methoden (Archimedes).

200 vC - 200 nC. Periode van verminderde activiteit in de zuivere wiskunde; opkomst van de astronomie en in verband hiermee de trigonometrie (Hipparchus, Ptolemaeus), geschriften over praktische wiskunde (Heron).

200 - 500 nC. Een laatste opflakking van de zuivere wiskunde. Centrum: Alexandrië. Diophantus (getaltheorie, algebra), Pappus (samenvatting van klassieke wiskunde), Proclus (commentaar op Euclides).

Thema's

De belangrijkste thema's in het historisch onderzoek naar de Griekse wiskunde zijn gedeeltelijk al hierboven in de periodisering genoemd. Het zijn:

- De Pythagoreïsche wiskunde; centrale rol van het getal, harmonische en andere gemiddelden, figuurgetallen, leer van even en oneven.
- De ontdekking van het bestaan van incommensurabele grootheden (dat wil zeggen grootheden die geen rationale verhouding hebben), en de gevolgen daarvan voor opzet en karakter van de Griekse wiskunde vóór Euclides.
- De paradoxen omtrent het oneindig en het continuüm (Zeno), de Griekse behandeling van limietprocessen.
- De oorsprong van de theorieën die door Euclides in zijn Elementen verzameld zijn.
- De drie klassieke problemen: verdubbeling van de kubus, driedeling van de hoek en quadratuur van de cirkel.
- Het werk van Archimedes, Apollonius en Diophantus.

Problemen

Er is slechts een klein aantal teksten bewaard gebleven, steeds via veelvuldig overschrijven en/of vertalen (met name in het Arabisch en het Latijn). Veel theorieën en hypothesen over de ontwikkeling van de Griekse wiskunde berusten daarom sterk op interpretaties van teksten en gissingen omtrent verloren teksten, dit gecombineerd met overwegingen over de logisch wiskundige samenhang van de inhoud der teksten. Het grote probleem daarbij is steeds om vast te stellen hoe plausibel deze theorieën en hypothesen zijn.

Verdere algemene problemen zijn: de invloed op de Griekse wiskunde van oudere wiskunde (Babylonische bijvoorbeeld) en de plaats van de wiskunde in de algemene Griekse cultuurgeschiedenis.

5 Wiskunde in het Verre Oosten

Plaatsing

China en India. In China is het ontstaan van eerste geschriften over wiskunde vrij moeilijk te dateren, maar dat was zeker vóór het jaar 0. Het hoogtepunt van wiskundige activiteit was in de 13e eeuw. Vanaf midden 19e eeuw was er een snel groeiende invloed van westerse wetenschap.

In India (het huidige India, Pakistan en Bangla-Desh) is het ontstaan der eerste wiskundige geschriften ook moeilijk te dateren. Tussen ca. 0 en ca. 1700 (begin kolonisatie) zijn er een aantal periodes van grote wiskundige activiteit; het hoogtepunt lag rond 1200.

Algemeen

De Chinese wiskunde ontwikkelde zich tot de 19e eeuw vrijwel zelfstandig met weinig invloed van buitenaf. De bewaard gebleven wiskundige werken hebben de vorm van opgavenverzamelingen met uitwerkingen. De nadruk ligt op rekenkunde, getaltheorie en het oplossen van vergelijkingen. Bewijzen worden niet of zelden gegeven.

In India hield veel wiskundige activiteit verband met astronomie (in het bijzonder de ontwikkeling van de trigonometrie). Er werd een decimaal positiestelsel voor getalnotatie ontwikkeld dat later, via de Arabische wiskunde, algemeen aanvaard werd. Er waren verder belangrijke bijdragen aan de algebra en de getaltheorie. Op bewijzen werd geen nadruk gelegd.

Thema's

Voor de Chinese wiskunde zijn de belangrijkste thema's de volgende:

- De inhoud en het ontstaan van de belangrijkste wiskundige werken, te weten (voor de spelling van de namen wordt de Engelse weergave uit de *Dictionary of Scientific Biography* aangehouden):
- *Chiu-chang suan-shu* (Negen hoofdstukken over de wiskunde) ca. 250 vC.
- *Ssu-yüan yü-chien* (Edele spiegel der vier elementen) door Chu Shih-Chieh (fl. ca. 1290).
- *Shu-shu Chiu-chang* (Wiskundige verhandeling in negen hoofdstukken) door Ch'in Chiu-Shao (ca. 1200 - ca. 1260).

De belangrijkste onderwerpen in deze en andere boeken zijn: magische kwadraten, begin van het gebruik van determinanten bij het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen, methoden voor benadering van wortels van vergelijkingen (zelfde als Horner's methode), getalcongruenties (Chinese reststelling), reeksen, de driehoek "van Pascal".

Voor de Indiase wiskunde zijn de thema's:

- Inhoud en ontstaan van de belangrijkste werken, namelijk (spelling volgens *Dict. Sc. Biogr.*):
- *Sulvasutra's*, uit de periode 800 vC - 200 nC, religieuze geschriften waarin wiskundige regels voorkomen onder meer in verband met de bouw van altaren.
- *Siddhanta's*, astronomische werken, waarin gedeelten wiskunde, uit de periode 200 - 1200 nC.
- *Aryabhatiya*, door Aryabatha (fl. ca. 500).
- *Brahmasphutasiddhanta* door Brahmagupta (fl. ca. 625).

- *Lilavati* en *Bijaganita* door Bhaskara (1114 - ca. 1185).

Belangrijke thema's in deze en andere werken zijn: de trigonometrie der *Siddhanta's*, de invoering van de sinus, de ontwikkeling van het decimaal positionele stelsel voor getalnotatie, in het bijzonder de invoering van de 0, getaltheorie, vergelijkingen, Diophantische vergelijkingen (vergelijking “van Pell” bij Bhaskara), machtreeksen (15e eeuw).

Problemen

Doordat de wiskunde zich in China grotendeels onafhankelijk heeft ontwikkeld kan hier het algemene probleem bestudeerd worden in hoeverre de verschillen ten opzichten van de westerse wiskunde te verklaren zijn uit verschillen in culturele en economische achtergrond.

In het geval van de Indiase wiskunde is een van de grootste problemen om vast te stellen hoe sterk de invloed van Griekse en Babylonische wiskunde is geweest in vergelijking met de eigen bijdrage van de Indiase wiskundigen.

N.B. Belangrijke Japanse activiteit in de wiskunde ontstond pas in de 17e eeuw.

6 Wiskunde binnen de Islamitische Cultuur

Plaatsing

750 - 1450. Tot 900 vooral Bagdad, daarna geheel Iran, Irak, en Afghanistan. Na ca. 1000 ook Egypte en Noord-Afrika, in mindere mate Spanje

Algemeen

Tot 900 betrof de wiskundige activiteit vooral assimilatie van wiskundige kennis uit Griekse, Babylonische en Indiase traditie. Daarna lag het accent meer op eigen werk. Na 1450 begon een periode van achteruitgang.

De overlevering van de Arabische wiskunde naar West Europa verliep voornamelijk via Spanje, ca. 1100 - 1300.

Namen

Al-Khwarizmi	ca. 820	Al-Biruni	972 - 1048
Thabit ibn Qurra	836 - 901	Umar al-Khayyam	1048 - 1131
Ibn al-Haytham	965 - 1041	Al-Kashi	gestorven 1429

Thema's

- Invoering van de “Indiase cijfers” (tientallig positiestelsel) voor het noteren van natuurlijke getallen
- Vinden van (positieve) wortels van vergelijkingen: voor graad 1 en 2 algebraïsche oplossing (recept) en meetkundige constructie (Al-Khwarizmi); voor graad 3 (en

soms 4) meetkundige constructie van de wortels met behulp van kegelsneden (o.a. Umar al-Khayyam); voor willekeurige graad rekenprocédés voor benadering van de wortels.

- Meetkunde: meetkundige problemen, geïnspireerd door problemen uit de Griekse meetkunde of door astronomische toepassingen; verder grondslagenonderzoek (parallellenpostulaat) en berekening van nauwkeurige trigonometrische tabellen.

Problemen

Doordat de belangrijke bronnen nog niet gepubliceerd zijn, is er nog geen goed overzicht van het werk van zelfs de meest belangrijke personen en scholen. Ook over de relaties van wiskundigen onderling en met andere geleerden is weinig bekend. Onder meer om deze reden is het vaak nog onduidelijk waarom men bepaalde wiskundige problemen bestudeerde.

Verdere belangrijke vragen zijn:

- Hoe vond het assimilatieproces in de periode 750-900 plaats?
- Waarom trad er na 1450 een achteruitgang in?
- In hoeverre was er een wisselwerking met Chinese wiskunde?
- Waarom is er relatief weinig overgeleverd naar West Europa?

7 Wiskunde in de Middeleeuwen in Europa

Plaatsing

Middeleeuwen, ca. 500 - ca. 1500, in Europa, met name in Byzantium, Italië, Spanje, Frankrijk, Engeland, Duitsland.

Algemeen

Er is geen algemene karakteristiek van Middeleeuwse wiskunde te geven.

In Byzantium (nu: Istanbul) werd Griekse wiskundige kennis bewaard. In West Europa was tot ca. 1100 vrijwel geen kennis van vroegere (Griekse) wiskunde levend. Enkele aan kloosters verbonden geleerden schreven studies over kalenderberekening en leerboeken voor het *quadrivium* (arithmetica, geometrie, muziek en astronomie) gebaseerd op het werk van Boethius (fl. ca. 500).

Vanaf ca. 1100 is er een opbloei, die zich voor wiskunde op drie gebieden afspeelt:

- Vertaling van klassieke en Arabische wiskundige werken (Euclides, Ptolemaeus, Al-Khwarizmi) in het Latijn; dit gebeurde vooral in Spanje.
- Praktische rekenkunde (in verband met handel en administratie) en enige algebra.
- Wiskunde geïnspireerd door filosofische en natuurwetenschappelijke vragen, in het bijzonder vragen omtrent de begrippen verandering en beweging.

Thema's en Namen

- Vroeg-Middeleeuwse wiskundige leerteksten, onder andere van Alcuin van York (ca. 735 - 804).
- Het bekend worden van Euclides' *Elementen* en Ptolemaeus' *Almagest*.
- Het werk van vertalers zoals Adelard van Bath (fl. 1116 - 1142) en Gerard van Cremona (ca. 1114 - 1187).
- Het werk van Leonardo Fibonacci (ook wel genoemd Leonardo van Pisa, ca. 1170 - na 1240), in het bijzonder zijn *Liber abaci* (algebra en getaltheorie); zijn belang voor de verspreiding van de Hindu-Arabische cijfers.
- De verspreiding van de Hindu-Arabische cijfers en de ontwikkeling van het praktisch rekenen in het algemeen.
- Door filosofische vragen geïnspireerde wiskundige studies over relaties tussen variabelen; in het bijzonder het werk van Thomas Bradwardine (ca. 1295 - 1349), over bewegingswetten en de eenparig versnelde beweging, en van Nicole Oresme (ca. 1320 - 1382) over grafische representatie van variabele kwantiteiten en kwaliteiten. Verder de leer van evenredigheden tussen variabelen, in het bijzonder (modern geschreven) $\frac{x}{x_0} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^k$, k geheel of gebroken.
- Opvattingen over het continuüm.

Problemen

- Verspreiding en gebruik van wiskundige teksten vóór de uitvinding van de boekdrukkunst.
- Functie van de wiskunde binnen het onderwijs.
- Verband tussen de ontwikkeling van wiskundige technieken (rekenen, boekhouden) en de opkomst van het handelskapitalisme in de steden.

8 Wiskunde in de Renaissance

Plaatsing

Ca. 1450 - ca. 1600, West Europa.

Algemeen

De wiskunde van de Renaissance periode was sterk gebonden aan praktische behoeften. Er ontstaan zelfstandige nieuwe ontwikkelingen. De meest opvallende daarvan was de ontwikkeling van algebraïsche notatie en de ontdekking van oplosregels voor 3e en 4e graads vergelijkingen. Verder werd de trigonometrie sterk ontwikkeld, aansluitend aan

de praktische problemen van de astronomie. Schilders en architecten ontwikkelden een wiskundige theorie van het perspectief. Kaartenmakers werkten wiskundige methoden van kartografie uit ten behoeve van de zeevaart. Er ontstond een grote behoefte aan onderwijs in praktisch rekenen (voor handel en administratie); dat onderwijs werd gegeven door de zogenaamde rekenmeesters, die deze praktische wiskunde ook verbeterden en interesse hadden voor meer theoretische vragen (algebra bijvoorbeeld).

Bij al deze ontwikkeling gaat het om wiskundige kennis van het niveau van Euclides en Ptolemaeus. Sommige werken van Archimedes, Apollonius en Diophantus waren wel bekend in het begin van de periode maar er werd niet veel mee gedaan. Pas in de laatste helft van de 16e eeuw werden deze moeilijkere wiskundige werken bekend en begrepen, dit door het werk van humanisten vertalers en commentatoren.

Thema's en Namen

- Algebra; ontwikkeling van notaties, van “retorisch” (geheel opgeschreven in woorden), via afkortingen, naar symbolen. Termen en symbolen voor de onbekende (“Coss”) en voor de bewerkingen (Luca Pacioli, ca. 1445-1517, Nicolas Chuquet, ca. 1445-1488).
- Ontdekking van de oplosregels voor 3e en 4e graads vergelijkingen door Scipione del Ferro (1465-1526), Ludovico Ferrari (1522-1565), Nicolo Tartaglia (ca. 1500-1557), en gepubliceerd door Girolamo Cardano (1501-1576) in zijn *Ars Magna* (1545).
- Ontwikkeling van de trigonometrie tot een afgeronde theorie; Johannes Regiomontanus (1436-1476).
- Behandeling van negatieve, irrationale en complexe getallen, in het bijzonder in Rafael Bombelli's (1526-1572) *Algebra* (1572).
- Perspectief en de relatie ervan tot de schilderkunst; Piero della Francesca (ca. 1415-1492).
- Kartografie, Gerard Mercator (1512-1594).
- De bijdrage van de rekenmeesters, bijvoorbeeld Adam Riese (1492-1559) en Michael Stifel (ca. 1487-1567) aan de ontwikkeling van de wiskunde.
- het bekend worden van de geavanceerde Griekse wiskunde (Archimedes, Apollonius, Diophantus, Pappus); activiteit van Regiomontanus op dit gebied; de latere vertalers en commentatoren zoals Frederico Commandino (1509-1575) en Francesco Maurolico (1494-1575).

Problemen

- Verband van de wiskunde met de nieuwe handel- en productievormen (vroeg kapitalisme).
- De functie van de rekenmeesters en hun onderwijs.

- De ontwikkeling van het getalbegrip in deze periode.

9 Wiskunde in de 17e Eeuw

Plaatsing

Ca. 1575 - ca. 1700, West Europa.

Algemeen

De 17e eeuw is de periode van de *Wetenschappelijke Revolutie*, het ontstaan van een op experimenten gebaseerde wetenschap die resultaten formuleert met behulp van wiskunde. In deze eeuw begint dan ook een wisselwerking tussen wiskunde en natuurwetenschap (vooral gebruik makend van differentiaal-vergelijkingen) die in de loop der tijd steeds intensiever is geworden.

De belangrijkste ontwikkeling in de wiskunde van de 17e eeuw is het ontstaan van de differentiaal- en integraalrekening. In dit proces laten wiskundigen de logische strengheid van de Griekse wiskunde los en bereiken met minder streng gefundeerde methoden essentieel nieuwe resultaten.

Wiskunde wordt bedreven door rekenmeesters, astronomen en professoren aan universiteiten, maar daarnaast ook door professionele bestuurders (Viète, Fermat) en leden van de hogere klasse met een inkomen uit vermogen (Descartes, Huygens); wiskunde, evenals natuurwetenschap, is een geaccepteerde interesse van de hogere klasse geworden.

Er ontstaat een intensieve internationale communicatie, eerst vooral per brief (met als centrale figuren Mersenne en Oldenburg), later ook via artikelen in de eerste wetenschappelijke tijdschriften.

Namen

Francis BACON	1561-1626	Gottfried Wilhelm LEIBNIZ	1646-1716
Isaac BARROW	1630-1677	Marin MERSENNE	1588-1648
Henry BRIGGS	1561-1630	John NAPIER	1550-1617
Bonaventura CAVALIERI	1598-1647	Isaac NEWTON	1642-1727
Girard DESARGUES	1591-1661	Henry OLDENBURG	1618-1677
René DESCARTES	1596-1650	Blaise PASCAL	1623-1662
Pierre de FERMAT	1601-1665	Gilles P. de ROBERVAL	1602-1675
Galileo GALILEI	1564-1642	Simon STEVIN	1548-1620
Jan HUDDE	1628-1704	François VIÈTE	1540-1603
Christiaan HUYGENS	1629-1695	John WALLIS	1616-1703
Johannes KEPLER	1571-1630		

Tabel 2. Wiskundigen uit de 17e eeuw

Thema's

- Infinitesimaalrekening: deze wordt ontwikkeld in verband met problemen omtrent krommen: bepaling van raaklijnen, uiterste waarden, buigpunten, kromtestralen, oppervlak onder een kromme (het zogenaamde quadratuurproblemen), zwaartepunt van een vlakgedeelte begrensd door krommen, booglengten etc. Uitwerking van nieuwe methoden: algebraïsche (raaklijnmethoden van Descartes en Fermat), kinematische (raaklijnmethode van Roberval), gebruik van indivisibelen (Cavalieri), quadratuurmethoden met behulp van limieten van benaderende figuren (Fermat, Huygens en vele anderen) en met behulp van transformaties (Barrow, Kepler en vele anderen), quadratuurmethoden met behulp van limieten van getalrijen (Wallis' "Arithmetica Infinitorum"), reeksen.
- De ontdekking van de differentiaal- en integraalrekening door Newton (ca. 1665) en Leibniz (ca. 1675).
- Algebra: leer van vergelijkingen, invoering van nieuwe notaties, in het bijzonder letters voor de coëfficiënten in de vergelijkingen (Viète, Descartes); tekenregel (Descartes); regels voor dubbele wortels (Hudde).
- Analytische Meetkunde: studie van krommen met behulp van hun vergelijkingen; ingevoerd door Fermat en Descartes (in eerste instantie alleen voor algebraïsche krommen).
- Projectieve meetkunde: aanzetten van een projectieve aanpak van meetkunde in het werk van Desargues en Pascal.
- Getaltheorie: het werk van Fermat.
- Waarschijnlijkheidsrekening: ontstaan in verband met vragen over geluksspelen (Pascal, Fermat, Huygens) en levensverzekeringen.
- Nieuwe hulpmiddelen voor praktisch rekenen: proportionaalpassers, decimale breuken (Stevin), logarithmen (Napier, Briggs), rekenmachines (Pascal, Leibniz).

Problemen

- De rol van de wiskunde binnen de wetenschappelijke revolutie.
- De rol van de wiskunde in nieuwe vormen van beroepsonderwijs (voor zeelui, ingenieurs, officieren).
- De impliciete rol van het functiebegrip in de 17e eeuwse wiskunde, die expliciet vooral gaat over krommen en variabelen, maar die moderne wiskundigen graag begrijpen in termen van functies.
- Beschrijving van 17e eeuwse meetkundige infinitesimaal-methoden in moderne analytische termen - daarbij gaat namelijk veel van de 17e eeuwse motivatie en denkwijze verloren.

10 Wiskunde in de 18e Eeuw

Plaatsing

Ca. 1700 - ca. 1800, West Europa. Belangrijke centra: Parijs, Berlijn, St Petersburg.

Algemeen

De belangrijkste activiteit in de 18e eeuwse wiskunde betrof de *analyse*: differentiaal- en integraalrekening, methoden voor oplossing van gewone en partiële differentiaalvergelijkingen en variatierekening. De analyse ontwikkelde zich, in wisselwerking met mechanica, hemelmechanica en vloeistofmechanica, van een speciale methode voor problemen omtrent krommen (ca. 1700) tot een uitgebreide theorie over functies, hun afgeleiden en integralen, differentiaalvergelijkingen en toepassingen daarvan in de mathematische fysica. Intussen bleven de grondslagen van de analyse nog zeer onduidelijk.

In de door de wetenschappelijk revolutie geïnspireerde filosofische stromingen (rationalisme, Newtonianisme, verlichting) speelt wiskunde een ambivalente rol; wiskunde wordt gezien enerzijds als bij uitstek rationeel en onbevooroordeeld denken, anderzijds als elitair monopoliseren van inzicht door een kleine groep ingewijden.

Wiskunde van hoog niveau wordt bedreven binnen de *Academies* (Parijs, Berlijn, St. Petersburg en andere), deze academies zijn staats- of hofinstellingen waar wetenschappers onderzoek doen en als adviseurs optreden bij projecten van de staat op het gebied van onderwijs en techniek.

De Franse ingenieursscholen ontwikkelen een onderwijsprogramma in de wiskunde dat zijn bekroning vindt in het onderwijs in de hogere wiskunde aan de École Polytechnique (Parijs, gesticht 1795).

De wiskunde in Engeland krijgt in de 18e eeuw een achterstand ten opzichte van de wiskunde bedreven op het continent.

Namen

Jean le Rond d'ALEMBERT	1717-1783	Guillaume F. de L'HÔPITAL	1661-1704
George BERKELEY	1685-1753	Joseph L. LAGRANGE	1736-1813
Jakob BERNOULLI	1654-1705	Johann H. LAMBERT	1728-1777
Johann BERNOULLI	1667-1748	Pierre S. de LAPLACE	1749-1827
Daniel BERNOULLI	1700-1782	Adrien LEGENDRE	1752-1833
Étienne BEZOUT	1739-1783	Abraham de MOIVRE	1667-1754
Lazare CARNOT	1753-1823	Gaspard MONGE	1746-1818
Alexis CLAIRAUT	1713-1765	Girolamo SACCHERI	1667-1733
J. Nicolas de CONDORCET	1743-1794	Brook TAYLOR	1685-1731
Leonhard EULER	1707-1783	Pierre VARIGNON	1654-1722
Christian GOLDBACH	1690-1764		

Tabel 3. Wiskundigen uit de 18e eeuw

Thema's

- Analyse (de Bernoulli's, Euler, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Legendre): het grondslagenprobleem, kritiek (Berkeley), infinitesimalen (l'Hôpital) limieten (d'Alembert), formele manipulaties (Lagrange), compensatie van fouten (Carnot); methoden voor gewone en partiële differentiaalvergelijkingen, elliptische integralen, reeksen (in het bijzonder Taylorreeks), variatierekening.
- Speciale problemen: brachistochroon (variatierekening) trillende snaar (golfvergelijking, partiële differentiaalvergelijkingen).
- Wisselwerking met mechanica.
- Algebra: bewijspogingen van de hoofdstelling; theorie van algebraïsche krommen (Bezout); begin van groepentheorie in onderzoek naar oplosbaarheid van vergelijkingen van 5e en hogere graad (Lagrange).
- Waarschijnlijkheidsrekening (Jakob Bernoulli, de Moivre, Condorcet, Lagrange), toepassing van analytische methoden in de waarschijnlijkheidsrekening.
- Getaltheorie, vermoeden van Goldbach, toepassing van analytische methoden in de getaltheorie (Euler).
- Meetkunde, aanzetten tot ontwikkeling van de niet-Euclidische meetkunde (Saccheri, Lambert); ontwikkeling van de beschrijvende meetkunde als leervak aan ingenieursscholen (Monge).
- De rol van Euler, in het bijzonder zijn leerboeken der analyse.
- De prioriteitsstrijd over de ontdekking der differentiaal- en integraalrekening (Leibniz of Newton).

Problemen

- Wiskunde en het natuurwetenschappelijk wereldbeeld.
- De relatie wiskunde - natuurwetenschap.
- Het belang van de hogere wiskunde (analyse) voor praktische toepassing (scheepsbouw, navigatie, artillerie, architectuur).
- De rol van de wiskunde in het technisch onderwijs.
- De redenen voor het achterblijven van de wiskunde in Engeland.

11 Wiskunde in de 19e Eeuw

Plaatsing

Ca. 1800 - ca. 1900, West Europa, ca. 1900 ook U.S.A.

Algemeen

Eerst in Duitsland, later ook elders komen de *universiteiten* op als belangrijke centra van wiskundig onderzoek; dit onderzoek wordt daar in nauw verband met onderwijs bedreven. In het wiskunde onderwijs aan Technische Hogescholen richt men zich vooral op meetkundige vakken. In de techniek wordt veel Beschrijvende Meetkunde gebruikt, daarnaast ook elementaire analyse. Tegen het eind van de eeuw wordt hogere analyse ook, vooral via electriciteitsleer, toegepast in de industrie en techniek.

Nieuwe gebieden van de mathematische fysica, in het bijzonder warmteleer en electriciteitsleer, vormen een vruchtbaar toepassingsgebied van de analyse (Fourier analyse, vector analyse).

Er worden speciale wiskundige tijdschriften opgericht.

In de wiskunde zelf zijn er intensieve ontwikkelingen in bijna alle vakgebieden. De belangrijkste tendenzen in die ontwikkeling zijn:

- *Rigorizing*, vooral in de analyse (preciesere definities, strengere eisen aan bewijzen, grotere belangstelling voor grondslagen); deze tendens leidt in het laatste kwart van de eeuw tot de opkomst van verzamelingenleer en nieuwe theorieën over de grondslagen van de wiskunde.
- Interesse in mathematische *structuren*, vooral in de algebra, maar ook in de logica, getaltheorie en meetkunde. De structuren zijn voornamelijk: groepen, ringen, lichamen, vectorruimten.
- *Abstractie*; de wiskunde wordt niet meer gezien als uitsluitend de leer van getallen en grootheden. In de algebra worden anderssoortige grootheden bestudeerd (quaternionen, matrices). Het ruimtebegrip wordt meer abstract en in de meetkunde stelt men de transformaties centraal; het algemene begrip variëteit wordt ingevoerd. De niet-Euclidische meetkunde wordt als zodanig onderkend. Oneindige verzamelingen van verschillende machtigheid worden bestudeerd. In de analyse worden functies met “pathologische” eigenschappen bestudeerd (bijvoorbeeld continue nergens differentieerbare functies).

Namen

Niels H. ABEL	1802-1829	William R. HAMILTON	1805-1865
Charles BABBAGE	1792-1871	Carl G. JACOBI	1804-1851
János BOLYAI	1802-1860	Felix KLEIN	1849-1925
Bernard BOLZANO	1781-1848	Leopold KRONECKER	1823-1891
George BOOLE	1815-1864	Ernst KUMMER	1810-1893
Georg CANTOR	1845-1918	Nikolai LOBACHEVSKY	1792-1856
Augustin-Louis CAUCHY	1789-1875	August F. MÖBIUS	1790-1868
Arthur CAYLEY	1821-1895	George PEACOCK	1791-1858
William K. CLIFFORD	1845-1879	Giuseppe PEANO	1858-1932
Richard DEDEKIND	1831-1916	Julius PLÜCKER	1801-1868
Gustav LEJEUNE-DIRICHLET	1805-1859	Jules H. POINCARÉ	1854-1912
Jean B.J. FOURIER	1768-1830	Jean-V. PONCELET	1788-1867
Friedrich FREGE	1848-1925	G.F. Bernhard RIEMANN	1826-1866
Évariste GALOIS	1811-1832	Jakob STEINER	1796-1863
Carl F. GAUSS	1777-1855	George STOKES	1819-1903
Josiah W. GIBBS	1839-1903	James J. SYLVESTER	1814-1897
Hermann GRASSMANN	1809-1877	William THOMSON (KELVIN)	1824-1907
George GREEN	1793-1841	Karl WEIERSTRASS	1815-1897

Tabel 4. Wiskundigen uit de 19e eeuw

Thema's

- Analyse: Rigorisering, limiet-definitie van de afgeleide en van de integraal (Cauchy, Riemann), strengheid bij behandeling van limieten (Weierstrass). Invoering van reële getallen (Cantor, Dedekind). Complexe analyse, elliptische functies, Abelse functies, Riemann-oppervlakken. Zeta functie (Gauss, Jacobi, Abel, Riemann, Weierstrass). Fourieranalyse (Fourier, in verband met warmteleer) convergentie van Fourierreeksen (Dirichlet, Cantor). Vectoranalyse (in de electriciteitsleer ontwikkeld, Hamilton, Stokes, Green, Gibbs, Thomson).
- Algebra: Gauss' bewijzen van de hoofdstelling. Onoplosbaarheid van de 5e graads vergelijking (Abel). Galoistheorie (Galois, Dedekind). Algebraïsche getaltheorie (Gauss, Dirichlet, Kummer, Kronecker, Dedekind). Opkomst van structuurbegrippen groep, ring, lichaam. Interesse in formele algebraïsche systemen in Engeland (Peacock), quaternionen (Hamilton) en andere systemen (Clifford). Invariantentheorie, matrices (Cayley, Sylvester). Algebraïsche benadering van de logica (Boole).
- Meetkunde: Opbloei van allerlei meetkundige gebieden: beschrijvende meetkunde, projectieve meetkunde (Poncelet, dualiteit), niet-Euclidische meetkunde (Gauss, Bolyai, Lobachevsky), algebraïsche meetkunde (Plücker), analytische meetkunde (Möbius), vectormetkunde (Grassmann, Cayley), differentiaalmeetkunde (Gauss, Riemann, het algemene begrip variëteit). Latere pogingen om eenheid in al deze deelgebieden te brengen met behulp van het begrip transformatie (Klein).

- Verzamelingenleer en grondslagen van de wiskunde. Het begrip oneindig, machtigheid van verzamelingen (Cantor). Symbolische logica (Boole, Frege, Peano).
- Waarschijnlijkheidsrekening: limietstellingen, verdelingsfuncties. Ontwikkeling van sociale en economische statistiek.
- Rekenmachines (Babbage).

Problemen

- Achtergronden van de opkomst der zuivere universitaire wiskunde in Duitsland
- Invloed van de verbinding met onderwijs op de ontwikkeling van de wiskunde.
- Verschillen in nationale stijlen van wiskunde (Duitsland: nadruk op zuivere wiskunde, Frankrijk: vooral gericht op analyse, Engeland: meer belangstelling voor algebraïsche zaken).
- Rol van de wiskunde in techniek en industrie.

12 Wiskunde in de 20e Eeuw

Plaatsing

Vanaf ca. 1900. Eerst voornamelijk in Europa en de U.S.A.; in de loop van de eeuw, en versterkt na de tweede wereldoorlog, ontstaan er in alle werelddelen centra van wiskundige activiteit.

Algemeen

Universiteiten blijven de belangrijkste centra voor wiskundig onderzoek; daarnaast zijn er de speciale researchinstituten en de industriële onderzoekslaboratoria. In het begin van de eeuw is Duitsland (in het bijzonder Göttingen) toonaangevend; deze hegemonie wordt afgebroken bij de machtsovername door de Nazi's in 1933; vele Duitse wiskundigen wijken uit naar andere landen, in het bijzonder naar de U.S.A. Na ca. 1940 is de U.S.A. het belangrijkste centrum voor wiskundige activiteit, maar er komt ook een sterke internationalisering van het vak, en andere landen dan de traditionele Europese beginnen aan de ontwikkeling deel te nemen (India, Japan bijvoorbeeld). Deze internationalisering blijkt ook uit de 4-jaarlijkse congressen die sinds 1893 gehouden worden. Er is een enorme groei in wiskundige activiteit.

De wisselwerking tussen wiskunde en natuurwetenschap (in het bijzonder de nieuwe fysische theorieën zoals statistische mechanica, quantummechanica en relativiteitsleer) wordt versterkt. Wiskunde wordt nu ook een belangrijke component van de in de industriële productie toegepaste wetenschap (eerst vooral via de electriciteitsleer, later ook op breder terrein). Naast deze "klassieke" toepassingen van wiskunde ontstaan twee nieuwe vormen van toepassing: ten eerste de toepassing van sinds ca. 1900 ontwikkelde nieuwe

statistische methoden in sociale en biologische wetenschappen (in het bijzonder psychologie, economie, landbouwkunde); ten tweede de toepassing van computers (ontwikkeling daarvan op grote schaal is gestart in de tweede wereldoorlog voor militaire doeleinden) in wetenschap, industrie en, sinds de 60er jaren op alle terreinen van maatschappelijke organisatie.

Binnen de zuivere wiskunde zijn er een aantal trends waar te nemen. Wat betreft de grondslagen van de wiskunde tekenen zich drie standpunten af: formalisme, logicisme en intuïtionisme. De strijd tussen deze standpunten blijkt moeilijk beslisbaar; zij werken wel als inspiratiebron voor ontwikkeling van de wiskundige logica en grondslagenleer.

Vanuit de algebra verspreidt zich door de gehele wiskunde de nadruk op axiomatisch ingevoerde structuren, dit na 1945 vooral onder invloed van de boeken van de Franse wiskundigengroep Bourbaki. In de analyse gaat de studie van functieruimten (functionaalanalyse, operatoren, Hilbertruimten) een belangrijke plaats innemen.

Mede in verband met de computer komen na de tweede wereldoorlog vele nieuwe wiskundige gebieden naar voren, zoals numerieke analyse, optimaliseringsmethoden en de wiskunde van eindige systemen.

Thema's en Problemen

(Door de enorme groei van de wiskunde in de 20e eeuw is het voor deze periode niet meer mogelijk een enigszins representatieve lijst thema's en problemen (en personen) op te stellen. Wat volgt is een zeer beperkte, tamelijk willekeurige keuze die vooral bedoeld is om het soort thema's en problemen dat speelde aan te geven.)

- D. Hilbert's (1862-1943) 23 tijdens het congres in 1900 genoemde wiskundige problemen.
- Grondslagen: logicisme (B.A.W. Russell 1872-1970), formalisme (Hilbert), intuïtionisme (L.E.J. Brouwer 1881-1966); verzamelingenleer, de paradoxen, continuümhypothese, het werk van K. Gödel (1906-1978).
- Algebra: de "moderne algebra" en de invloed van Bourbaki.
- Meetkunde: Hilbert's axiomatisering van de Euclidische meetkunde, verdere axiomatische onderzoeken en klassifikatie van meetkundige structuren.
- Analyse: Lebesgue-integratie (H.L. Lebesgue 1875-1941), functionaalanalyse, distributies, numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen.
- De computer: ontwikkeling in de tweede wereldoorlog, John von Neumann (1903-1957), hardware (vacuumbuizen, transistors, chips), computertalen, maatschappelijke invloed van de computer; ontwikkeling optimaliseringstheorie (lineair programmeren) en andere computergebonden theorieën, speltheorie, operations research).
- Statistiek: ontwikkeling in verband met genetica en landbouwkunde (R.A. Fisher 1890-1962), toepassingen, maatschappelijke invloed.
- Topologie: axiomatische opbouw (F. Hausdorff 1868-1942).

- Waarschijnlijkheidsrekening: axiomatisering, rol van het begrip maat (A.N. Kolmogorov, 1903-1987).
- Wiskunde onderwijs, vernieuwingsbewegingen, in het bijzonder de “new math” van de 60er jaren.
- Industriële en militaire toepassingen van de wiskunde.

Geschiedenis van de Wiskunde
Deel B
Speciale onderwerpen

1 Incommensurabele Grootheden en Irrationale Verhoudingen in de Griekse Wiskunde

Inleiding

De Egyptenaren en de Babyloniërs hebben een rekenkunde ontwikkeld voor positieve gehele getallen en breuken. De Pythagoreeërs (5e eeuw v. C.) stelden het begrip (positief geheel) getal centraal. Zij meenden dat een dieper begrip van de verschijnselen in deze wereld te verkrijgen is door te zoeken naar de getallen en de getalsverhoudingen die er achter zitten.

Het Pythagoreïsche getalbegrip omvatte geen breuken. Als bijvoorbeeld voor twee grootheden a en b (lengtes, oppervlakten, gewichten en dergelijke) gold

$$a = \frac{5}{8}b,$$

dan werd dat zo opgevat dat er een “gemeenschappelijke maat” van a en b was, namelijk

$$d = \frac{b}{8} = \frac{a}{5},$$

zodanig dat a en b beide, gemeten ten opzichte van deze maat d , een gehele waarde hebben:

$$a = 5d, \quad b = 8d.$$

Zo werden situaties waarin breuken optreden steeds tot het begrip geheel getal teruggebracht; breuken zelf traden niet als een speciaal soort getal op.

Grootheden die, zoals a en b in het voorbeeld hierboven, een *gemene maat* hebben waarvan ze beide een geheel veelvoud zijn, heten commensurabel (letterlijk: samen meetbaar).

Het lijkt waarschijnlijk dat de Pythagoreeërs een tijd lang hebben gemeend dat elk tweetal gelijksoortige grootheden commensurabel is. In dat geval zouden verhoudingen steeds als verhoudingen van gehele getallen uitgedrukt kunnen worden. Maar die aanname is onjuist: er zijn paren gelijksoortige grootheden die geen gemene maat hebben, dat wil zeggen dat hun verhouding niet rationaal is. Een voorbeeld hiervan treedt op bij het vierkant: de verhouding van zijde en diagonaal ($1 : \sqrt{2}$) is niet rationaal, de twee lijnstukken zijn dus incommensurabel.

Het bestaan van incommensurabele grootheden is ontdekt door Griekse wiskundigen en die ontdekking heeft een grote invloed gehad op het karakter en de theoretische ordening van de Griekse wiskunde.

In dit stuk zullen een aantal aspecten van de ontdekking en het effect ervan aan de orde komen. Over deze kwestie zijn er overigens vrij veel meningsverschillen onder historici. Ik volg hier in grote lijnen de ideeën van W.R. Knorr in zijn boek *The evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht 1975.

Pythagoreïsche theorie van getallen en verhoudingen

De boeken VII-IX van Euclides' *Elementen* (ca. 300 v.C.) gaan over getallen, getalsverhoudingen, en deelbaarheid. Een groot deel van de inhoud stamt uit de Pythagoreïsche school (ca. 450 v.C.). De definitie van evenredigheid staat (als nr. 20) in de reeks definities van het VIIe boek die ik hier ter illustratie volledig weergeef:

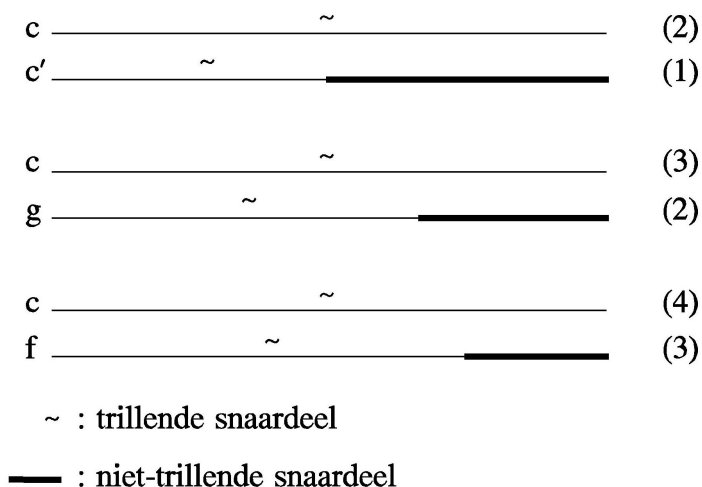
1. An **unit** is that by virtue of which each of the things that exist is called one.
2. A **number** is a multitude composed of units.
3. A number is a **part** of a number, the less of the greater, when it measures the greater;
4. but **parts** when it does not measure it.
5. The greater number is a **multiple** of the less when it is measured by the less.
6. An **even number** is that which is divisible into two equal parts.
7. An **odd** number is that which is not divisible into two equal parts, or that which differs by an unit from an even number.
8. An **even-times even number** is that which is measured by an even number according to an even number.
9. An **even-times odd number** is that which is measured by an even number according to an odd number.
10. An **odd-times odd number** is that which is measured by an odd number according to an odd number.
11. A **prime number** is that which is measured by an unit alone.
12. Numbers **prime to one another** are those which are measured by an unit alone as a common measure.
13. A **composite number** is that which is measured by some number.
14. Numbers **composite to one another** are those which are measured by some number as a common measure.
15. A number is said to **multiply** a number when that which is multiplied is added to itself as many times as there are units in the other, and thus some number is produced.
16. And, when two numbers having multiplied one another make some number, the number so produced is called **plane**, and its **sides** are the numbers which have multiplied one another.
17. And, when three numbers having multiplied one another make some number, the number so produced is **solid**, and its **sides** are the numbers which have multiplied one another.
18. A **square number** is equal multiplied by equal, or a number which is contained by two equal numbers.
19. And a **cube** is equal multiplied by equal and again by equal, or a number which is contained by three equal numbers.
20. Numbers are **proportional** when the first is the same multiple, or the same part, or the same parts, of the second that the third is of the fourth.
21. **Similar plane** and **solid** numbers are those which have their sides proportional.
22. A **perfect number** is that which is equal to its own parts.¹

¹Geciteerd uit de meest gangbare Engelse vertaling van de *Elementen*: Euclides, *The thirteen books of Euclid's Elements* (tr. intr. comm. Thomas L. Heath; herdruk van ed. 1926), 3 vols, New York (Dover),

Merk op dat volgens deze definities 1 niet zelf een getal is. Definities **6-10** behoren bij een zeer vroeg ontwikkelde theorie van even en oneven.

Voor de Pythagoreeërs was ‘getal’ meer dan een louter wiskundig begrip; zij meenden dat getallen een belangrijke sleutel vormden voor het begrijpen van natuurlijke en spirituele zaken. Die mening werd, onder meer, geïnspireerd en bevestigd door hun ontdekkingen in muziektheorie. Zij vonden namelijk dat door snaren voortgebrachte tonen harmonisch samen klinken als de lengten der snaren zich verhouden als kleine gehele getallen.

Bijvoorbeeld:



Figuur 1. Snaarlengten en tonen

snaarlengten 2 : 1, octaaf (c–c’); snaarlengten 3 : 2, quint (c–g); snaarlengten 4 : 3, kwart (c–f) (zie de figuur). Binnen de Pythagoreïsche school was er ook grote belangstelling voor getalmystiek.

Voor commensurabele grootheden kan men, analoog aan de definitie voor getallen (Def. **20**) definiëren wanneer verhoudingen gelijk zijn. Laten A en B commensurabele grootheden zijn, evenals C en D . Laat s de grootste gemene maat zijn van A en B , en t die van C en D . Dan geldt $A : B = C : D$ dan en slechts dan als A en B dezelfde veelvouden zijn van s als C en D van t (dus $A = ps$, $B = qs$, $C = pt$, $D = qt$). Maar deze definitie is niet te hanteren in het geval van incommensurabele grootheden omdat er dan geen gemene maat bestaat.

De “ontdekking van het irrationale”

Over de ontdekking van het bestaan van incommensurabele grootheden zijn er geen directe gegevens. Meestal wordt aangenomen dat het ontdekt is aan het geval van de diagonaal

en de zijde van een vierkant. Men vindt in de *Elementen* van Euclides een bewijs dat zijde en diagonaal van een vierkant geen gemene maat hebben. Dat bewijs stamt van vóór Euclides' tijd maar is pas door latere bewerkers aan de *Elementen* toegevoegd (als stelling 117 van boek X). De grondgedachte in dat bewijs is als volgt (vergelijk Figuur 2):

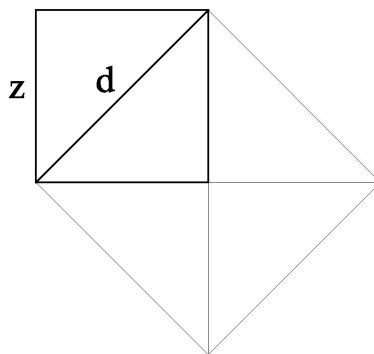
Veronderstel dat de zijde z en de diagonaal d van een vierkant commensurabel zijn. Dan hebben zij een gemene maat m en er geldt

$$z = pm, \quad d = qm,$$

voor zekere getallen p en q . Men mag aannemen dat p en q niet beide even zijn (anders kan men $2m$ als gemene maat nemen, en dat proces kan worden voortgezet tot een van beide getallen oneven wordt). Volgens de stelling van Pythagoras is het vierkant met zijde d twee keer zo groot als het vierkant met zijde z (dit is overigens ook direct uit de figuur te zien), dus

$$q^2 = 2p^2.$$

Daaruit volgt dat q^2 even is. Dan is q ook even, want het kwadraat van een oneven getal is oneven. Maar dan is q^2 een viervoud en dus is p^2 even, waaruit weer volgt dat p even is. Dat is echter in tegenspraak met het feit dat p en q niet beide even zijn. Het uitgangspunt moet dus fout zijn: z en d zijn niet commensurabel.



Figuur 2. Diagonaal en zijde van een vierkant

Het bewijs is gebaseerd op een theorie van even en oneven (met bijvoorbeeld stellingen zoals: het kwadraat van een oneven getal is oneven). Het is goed mogelijk dat binnen de Pythagoreïsche school het inzicht is ontstaan dat zijde en diagonaal van een vierkant incommensurabel zijn (bijvoorbeeld bij pogingen om de verhouding van zijde en diagonaal werkelijk uit te rekenen) en dat vervolgens een dergelijk bewijs van de incommensurabiliteit geleverd is. Dat zou zich afgespeeld kunnen hebben in de tweede helft van de 5e eeuw v.C. (Knorr zegt: in de periode 430–410 v.C.).

Er is een andere hypothese over de ontdekking van het irrationale. Deze brengt de ontdekking in verband met het (later zo genoemde) Euclidische algorithm voor het vinden van de grootste gemene deler, en met het *pentagram* (de vijfhoek), het symbool van de Pythagoreeërs.

Het Euclidische algorithm (Euclides legt het uit in *Elementen* VII 1–2), toegepast op getallen, levert de grootste gemene deler; toegepast op gelijksoortige grootheden levert het algorithm de grootste gemene maat, als die bestaat. Het algorithm verloopt als volgt: Laten A en B twee grootheden zijn waarvan ik de gemene maat wil vinden, en laat A groter zijn dan B . Trek B zo vaak van af van A dat de rest C kleiner is dan B . Als C nul is, is B de gevraagde gemene maat. Zo niet, trek dan C zo vaak af van B dat de rest D kleiner is dan C . Als D nul is is C de gevraagde maat, zo niet, trek D zo vaak af van C dat de rest kleiner is van D etc. Zet het proces voort tot er een rest nul optreedt. De voorlaatste rest is dan de grootste gemene deler of de grootste gemene maat. Een voorbeeld in getallen:

$$\begin{aligned} A = 168, \quad B = 78, \quad 168 - 2 \times 78 &= 12 = C, \\ 78 - 6 \times 12 &= 6 = D, \\ 12 - 2 \times 6 &= 0. \end{aligned}$$

De grootste gemene deler is dus 6.

Het is duidelijk dat bij gehele getallen het proces uiteindelijk afbreekt (de resten vormen een strict dalende rij gehele positieve getallen). Ook bij commensurabele grootheden breekt het proces uiteindelijk af. Als het proces dus niet afbreekt is dat een teken dat de betreffende grootheden niet commensurabel zijn.

De bovengenoemde hypothese over de ontdekking van het irrationale (gelanceerd door K. von Fritz) stelt nu dat de Pythagoreeërs in de figuur van het pentagram een tweetal lijnstukken hebben gevonden waarvoor het proces van het Euclidische algorithm niet ophoudt. Dat zou als volgt gegaan kunnen zijn.

De Pythagoreeërs bestudeerden verschillende speciale verhoudingen. Een daarvan was de “gulden snede” (die naam is overigens van later datum). Twee grootheden a en b ($a > b$) hebben deze verhouding als

$$b : a = a : (a + b),$$

dus: de kleine staat tot de grote als de grote tot de som. De evenredigheid is equivalent met

$$(a - b) : b = b : a,$$

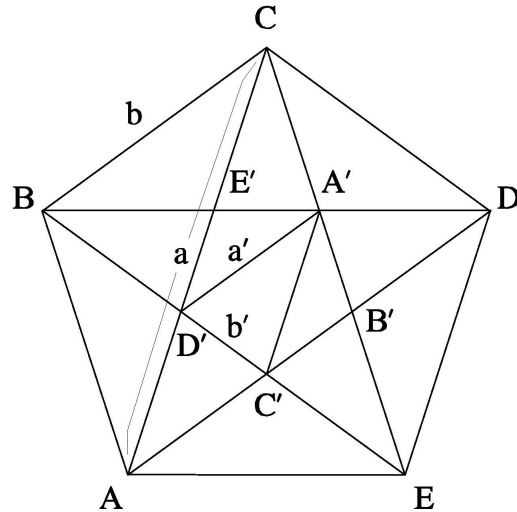
dus: het verschil staat tot de kleine als de kleine tot de grote. De equivalentie van beide evenredigheden is een gevolg van de stelling dat uit

$$A : B = C : D$$

volgt

$$(A \pm B) : B = (C \pm D) : D;$$

deze stelling komt voor in Euclides' *Elementen* (V, 17–18) en moet al eerder bekend zijn geweest. (Men rekt eenvoudig — maar wel anachronistisch — na dat in het geval van de gulden snede $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.)



Figuur 3. Het Pentagram

In het bijzonder treedt deze speciale verhouding op tussen de diagonaal a en de zijde b van een pentagram. Dit is als volgt in te zien:

Beschouw het pentagram $ABCDE$ met diagonaal a en zijde b (Figuur 3). Als alle diagonalen worden getrokken ontstaat in het midden een kleiner pentagram $A'B'C'D'E'$; noem daarvan de diagonaal a' en de zijde b' . Bekijk de stukken langs een diagonaal, bijvoorbeeld $AD'E'C$ en merk op dat

$$\begin{aligned} AD' &= a' && (\text{want } AD'A'C' \text{ is een ruit}) \\ D'C &= b && (\text{want } D'CDE \text{ is een ruit}) \\ a' &= a - b && (AD' = AC - D'C) \\ b' &= b - a' && (D'E' = D'C - E'C) . \end{aligned}$$

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken $A'D'E$ en $B'C'E$ volgt

$$B'C' : A'D' = B'E : A'E ,$$

dus

$$b' : a' = (a - b) : b .$$

Maar b' en a' zijn, evenals b en a , zijde en diagonaal van een pentagram, en alle pentagrammen zijn gelijkvormig, dus

$$b' : a' = b : a ;$$

bijgevolg

$$(a - b) : b = b : a ,$$

waarmee bewezen is dat zijde en diagonaal van het pentagram inderdaad de “gulden snede” verhouding hebben.

Passen we nu het algorithm van Euclides toe op de diagonaal a en de zijde b , dan vinden we:

$$\begin{aligned} a - 1 \times b &= a' \\ b - 1 \times a' &= b' \\ a' - 1 \times b' &= \dots \end{aligned}$$

Dat wil zeggen dat na twee stappen in het linkerlid het verschil staat van diagonaal en zijde van de binnenste vijfhoek. Het algorithm stopt dus niet want in iedere vijfhoek treedt een nieuwe diagonalen–vijfhoek op; het algorithm kan dus nooit een rest 0 opleveren. De zijde en de diagonaal van een vijfhoek zijn dus incommensurabel.

Een crisis?

P. Tannery, een Franse historicus van de wiskunde, heeft, nu zo’n 100 jaar geleden, het idee gelanceerd dat de ontdekking van het irrationale voor de Pythagoreeërs een “logisch schandaal” betekende en de oorzaak werd van een diepe *grondslagen crisis* in de Griekse wiskunde. Daarvoor zagen hij en andere historici die het idee overnamen een aantal aanwijzingen. Allereerst zijn er (latere) overleveringen die zeggen dat de ontdekking een tijd lang geheim is gehouden door de Pythagoreeërs. Nu ondermijnt de ontdekking van incommensurabele grootheden een basis-idee van de Pythagoreeërs, namelijk dat alles met getallen uitdrukbaar is. Geheimhouding zou er op duiden dat de ontdekking als een crisis of een schandaal werd gezien dat niet bekend mocht worden.

Een tweede aanwijzing ligt in de rol van de theorie van verhoudingen binnen de Griekse wiskunde. Er is een theorie van verhoudingen van getallen overgeleverd in Euclides’ *Elementen* (boek VII, vgl. def. **20** uit de lijst hierboven). Daarnaast is er een theorie over verhoudingen uitgewerkt (boek V) die van toepassing is op grootheden ongeacht of ze commensurabel zijn of niet.

Verder hebben de eerste boeken van de *Elementen* de merkwaardigheid dat daarin het begrip verhouding pas heel laat wordt gebruikt. Euclides heeft blijkbaar een opzet gekozen waarin zoveel mogelijk meetkundige stellingen worden afgeleid zonder het begrip verhouding te gebruiken; daardoor geeft hij soms ingewikkelde bewijzen voor stellingen die met behulp van het verhoudingsbegrip veel eenvoudiger te leveren zouden zijn.

Tenslotte is een van de opvallende eigenschappen van de wiskunde in Euclides’ *Elementen*, en van de latere Griekse wiskunde in het algemeen, dat het groundbegrip bijna steeds de meetkundige *grootheid* is (meestal lengte of oppervlakte). Dat gebeurt speciaal ook daar waar moderne wiskundigen eerder getal als groundbegrip zouden verwachten, bijvoorbeeld in boek II der *Elementen*, waarin, in meetkundige formulering, een hele serie stellingen staat die eigenlijk neerkomen op algebraïsche rekenregels (zoals $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$). Men spreekt hier wel van “geometrische algebra.”

Deze aanwijzingen suggereren, volgens Tannery en anderen, een crisis, veroorzaakt door het feit dat de begrippen getal en verhouding niet meer als groundbegrippen gehan-

teerd konden worden omdat ze door de ontdekking van incommensurabele grootheden suspect waren geworden. Het gebruik van verhoudingen werd daarom door Euclides uitgesteld; meetkundige grootheid nam de plaats in van getal als grondbegrip van de wiskunde en er werd een nieuwe theorie van verhoudingen uitgewerkt.

Overigens speelt in de crisis-hypothese nog een tweede crisisachtige ontdekking mee, namelijk Zeno's paradoxen omtrent het oneindige. Ook in dit geval moesten wiskundigen hun basisbegrippen opnieuw overdenken en aanpassen aan de nieuwe inzichten.

De vroege ontwikkeling van de theorie van irrationale verhoudingen

Latere historici hebben de hypothese van een crisis vaak afgezwakt; zij zien de ontwikkelingen rond incommensurabiliteit eerder als normale reacties van wiskundigen op een ingrijpende ontdekking. Over de belangrijkste stadia in deze ontwikkeling bestaat nu vrij grote overeenstemming. Die stadia waren:

- De ontdekking van het voorkomen van irrationale verhoudingen door wiskundigen uit de Pythagoreïsche school.
- Het werk van Theodorus (ca. 465 – na 399 v.C.) over speciale irrationale verhoudingen. Theodorus construeerde een reeks vierkanten waarvan de oppervlakten zich verhielden als $1 : 2 : 3 : 4$ etc. Laat z_n de zijde van het n -de vierkant zijn, en laat $z_1 = a$. Theodorus beschouwde nu de verhoudingen

$$z_n : a .$$

Modern geschreven zijn die verhoudingen

$$z_n : a = \sqrt{n} : 1 .$$

Theodorus bewees dat voor de getallen $n = 2, 3, 5, \dots, 17$, (n niet kwadraat) de betreffende verhouding irrationaal is. Hoe hij dat bewees en waarom hij bij 17 ophield is niet overgeleverd, daarover zijn wel veel hypothesen opgesteld waarop ik hier verder niet inga.

- Het werk van Theaetetus (ca. 417 – 369 vc). Theaetetus generaliseerde het werk van Theodorus; hij bewees dat voor alle niet-kwadraten n de verhouding $z_n : a$ irrationaal is. Hij werkte verder getaltheoretische stellingen uit die nodig waren voor de irrationaliteitsbewijzen. Deze theorie is opgenomen in het 7e boek van de *Elementen*. Ook begon hij een klassifikatie van irrationale verhoudingen in soorten. Vermoedelijk hebben Theodorus en Theaetetus de definitie gehanteerd volgens welke twee verhoudingen gelijk zijn als in beide gevallen het proces van het Euclidisch algoritme dezelfde oneindige reeks coëfficiënten oplevert. Aan deze methode kleven echter bezwaren die Eudoxus ondervond door een volledig nieuwe definitie.

- Het werk van Eudoxus (ca. 400 – ca 347 v.C.). Eudoxus stelde een nieuwe definitie op voor gelijkheid van verhoudingen (zie hieronder) en ontwikkelde op basis daarvan een theorie van verhoudingen die zowel voor commensurabele als voor incommensurabele grootheden van toepassing was.

Grootheden

De ontdekking van het irrationale maakte duidelijk dat de theorie van verhoudingen niet op getallen terug te voeren was; het Pythagoreïsche geloof “alles is getal” was ondermijnd, een nieuwe theorie van verhoudingen moest dus allereerst duidelijk maken wat de grootheden waren waarvan men verhoudingen wenste te bestuderen. Daartoe werd in de Griekse periode een theorie over grootheden ontwikkeld die we vooral kennen uit geschriften van Aristoteles. Grootheid (kwantiteit, Engels: quantity, magnitude) was een fundamentele filosofische begripscategorie samen met zulke begrippen als ‘substantie’ ‘kwaliteit’ en ‘relatie’. Wiskunde werd gezien als de leer bij uitstek van de grootheden.

Het begrip grootheid kan het best omschreven worden als abstractie bij zaken waarbij sprake is van:

- relaties ‘meer’, ‘minder’ en ‘gelijk’ ($>$, $<$, $=$);
- samenvoeging ($a + b = c$) en afsplitsing ($c - a = b$);
- in het bijzonder (scalair) vermenigvuldiging ($n \times$) en deling ($: n$).

Merk op dat er geen begrip ‘vermenigvuldiging van twee grootheden’ wordt verondersteld. Verder is er geen ‘0’; alle grootheden zijn positief.

Voorbeelden zijn: de meetkundige grootheden lengte, oppervlak, inhoud, verder bijvoorbeeld tijdsduur, gewicht en kracht. De genoemde grootheden zijn ongelijksoortig in de zin dat twee twee grootheden van verschillende soort niet met elkaar vergeleken kunnen worden; $a = b$ of $a + b$ heeft geen betekenis als a een lengte is en b een oppervlak. Ook (natuurlijke) getallen, en in het algemeen hoeveelheden, werden wel als grootheden opgevat, maar dan discrete grootheden, in tegenselling to de eerder genoemde, die ‘continu’ werden genoemd.

Een van de belangrijkste effecten van de ontdekking van het irrationale was dat het begrip grootheid een grotere en fundamentele rol in de wiskunde kreeg dan het begrip (natuurlijk) getal. Pas in de 19e eeuw heeft men een mogelijkheid gevonden om het begrip grootheid te definiëren op basis van het begrip getal.

Eudoxus’ theorie van verhoudingen

Eudoxus’ theorie van verhoudingen is bewaard gebleven omdat Euclides hem heeft opgenomen in de boeken V en VI van de *Elementen*. Boek V begint met de definities van de grondbegrippen van de theorie:

1. A magnitude is a **part** of a magnitude, the less of the greater, when it measures the greater.
2. The greater is a **multiple** of the less when it is measured by the less.

3. A **ratio** is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind.
4. Magnitudes are said to **have a ratio** to one another which are capable, when multiplied, of exceeding one another.
5. Magnitudes are said to **be in the same ratio**, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever be taken of the first and the third, and any equimultiples whatever of the second and the fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order.
6. Let magnitudes which have the same ratio be called **proportional**.
7. When, of the equimultiples, the multiple of the first magnitude exceeds the multiple of the second, but the multiple of the third does not exceed the multiple of the fourth, then the first is said to **have a greater ratio** to the second than the third has to the fourth.²

In Definitie 3 wordt vastgelegd dat alleen over verhoudingen van gelijksoortige grootheden zal gesproken worden. Ongelijksoortige grootheden zijn bijvoorbeeld: lijnstuk en oppervlakte, lijnstuk en tijdsduur, inhoud en gewicht. Er wordt dus alleen over verhoudingen gesproken tussen twee lijnstukken, twee oppervlakten, twee gewichten, etc.

In Definitie 4 wordt een verdere beperking aangebracht. Er zal alleen over een verhouding van gelijksoortige grootheden a en b gesproken worden als deze voldoen aan de volgende eis: Er zijn natuurlijke getallen p en q zodanig dat

$$pa > b \text{ en } qb > a .$$

Dat deze definitie is toegevoegd suggereert dat Eudoxus de mogelijkheid openhield dat er gelijksoortige grootheden zijn waarvoor het bovenstaande niet geldt. Met name zouden er dan een a en een b kunnen zijn zó dat voor alle natuurlijke getallen n geldt

$$na < b .$$

Zo'n a is dan oneindig klein ten opzichte van b . In Definitie 4 wordt dus het bestaan van oneindig kleine grootheden open gelaten; er wordt echter uitdrukkelijk gesteld dat de verhoudingstheorie voor zulke grootheden niet geldt. Overigens wordt in latere boeken van de *Elementen* (met name boek X, Stelling 1) deze definitie geïnterpreteerd als een axioma dat stelt dat ieder tweetal gelijksoortige grootheden aan de voorwaarde voldoet. Bij Archimedes (in zijn geschrift over de quadratuur van de parabool) komt de definitie als postulaat voor. Daarom wordt de eigenschap uitgesproken in Definitie 4 tegenwoordig genoemd het “axioma van Eudoxus–Archimedes.” In het bijzonder heten tegenwoordig structuren waarin positieve grootheden voorkomen, die niet aan die eigenschap voldoen, “niet-Archimedisch.”

Definitie 5 zegt dat bij vier grootheden a , b , c en d de verhouding $a : b$ gelijk is aan de verhouding $c : d$ wanneer voor ieder paar natuurlijke getallen p en q geldt:

$$\begin{aligned} pa > qb &\iff pc > qd \\ pa = qb &\iff pc = qd \\ pa < qb &\iff pc < qd . \end{aligned}$$

²Heath' editie (zie noot 1) Vol. 2, pp. 113-114.

Definitie 6 legt terminologie vast. Definitie 7 legt vast wanneer een verhouding groter is dan een andere.

Het belang van Eudoxus' definitie

Het belang van Eudoxus' definitie van gelijkheid van verhoudingen is dat op basis van deze definitie een theorie van verhoudingen afgeleid kan worden die geldig is voor zowel rationale als irrationale verhoudingen. Deze theorie staat in boeken V en VI van de *Elementen*. Karakteristieke stellingen zijn bijvoorbeeld: als $a : c = b : c$ dan geldt $a = b$ (V-9); als $a : b = c : d$ en $c : d = e : f$ dan geldt $a : b = e : f$ (V-11); twee driehoeken met dezelfde hoogte verhouden zich als hun bases (VI-1). Met Eudoxus' definitie konden de stellingen in deze theorie eenvoudiger afgeleid worden dan met een op het algorithm van Euclides gebaseerde definitie.

Verder is de definitie en de daarop gebouwde theorie een van de meest sprekende voorbeelden van de strenge axiomatisch deductieve opbouw van de wiskunde die de Griekse wiskundigen bereikten. Er zijn zelfs directe verbanden te leggen tussen Eudoxus' definitie en de "seden van Dedekind." R. Dedekind (1831–1916) definieerde in 1872 reële getallen met behulp van deze seden.

Het verband tussen Eudoxus' theorie van verhoudingen en de reële getallen

Tot slot van dit hoofdstuk bespreken we het verband tussen Eudoxus' definitie en Dedekind-seden.

De reële getallen, $\mathbb{R}$ worden tegenwoordig òf axiomatisch òf constructief ingevoerd. Bij de *axiomatische invoering* wordt $\mathbb{R}$ gedefinieerd als een verzameling met bewerkingen (+ en $\times$) en een relatie ($<$) die aan een reeks axioma's voldoen. Er wordt dan bewezen dat twee zulke structuren noodzakelijk isomorf zijn, zodat er essentieel slechts één structuur $\mathbb{R}$, bestaat. Vervolgens wordt gepostuleerd (niet bewezen) dat er inderdaad zo'n structuur bestaat. Die vormt dan de basis voor een groot deel van de wiskunde, in het bijzonder de Analyse.

Bij de *constructieve* invoering van $\mathbb{R}$, gaat men uit van de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$. Het bestaan en de uniciteit van $\mathbb{N}$ wordt weer gepostuleerd (niet bewezen). Eerst construeert men, met behulp van paarvorming en equivalentierelaties, uit $\mathbb{N}$ achtereenvolgens de gehele getallen $\mathbb{Z}$ en de rationale getallen $\mathbb{Q}$. Dan wordt $\mathbb{R}$, uit $\mathbb{Q}$ geconstrueerd, meestal met Cauchy-rijtjes, soms met behulp van Dedekind-seden. Tenslotte wordt aangetoond dat de zo verkregen $\mathbb{R}$, aan de gewenste axioma's voldoet.

De eigenschap die $\mathbb{R}$, bij uitstek geschikt maakt voor de beschrijving van continue veranderingsprocessen (analyse!) is de zogenaamde volledigheid. Deze wordt vastgelegd in een volledighedsaxioma, dat bijvoorbeeld de volgende vorm kan hebben (er zijn vele equivalente formuleringen mogelijk):

Axioma. Iedere naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$, heeft een supremum in $\mathbb{R}$.

Dit axioma zorgt er bijvoorbeeld voor dat alle convergente rijen in $\mathbb{R}$, een limiet hebben.

Bij de axiomatische invoering van $\mathbb{R}$, wordt dit axioma *gesteld*; bij de constructieve invoering moet de geldigheid van het axioma *bewezen* worden, dit is een van de lastigere stappen in de constructie.

Er is nu een suggestief verband tussen Eudoxus' theorie van verhoudingen en de constructie van $\mathbb{R}$ met behulp van Dedekind-snedes. Een Dedekind-sneede in de rationale getallen $\mathbb{Q}$ is een verdeling van $\mathbb{Q}$ in twee aansluitende gebieden. Precieser:

Definitie. Een *Dedekind-sneede* in $\mathbb{Q}$ is een tweetal deelverzamelingen $\mathcal{A}_1$ en $\mathcal{A}_2$ van $\mathbb{Q}$ zó dat:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 &= \mathbb{Q} , \\ \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 &= \emptyset , \\ \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad \{x \in \mathcal{A}_1 \wedge y \in \mathcal{A}_2 \implies x < y\} .\end{aligned}$$

$\mathcal{A}_1$ is dus het linkerdeel van de sneede, $\mathcal{A}_2$ het rechter. Sneden in $\mathbb{Q}$ hebben soms een grens, zoals bij

$$\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 3\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 3\} ,$$

en ook bij

$$\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 3\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 3\} ;$$

in beide gevallen is de grens 3. Maar andere sneden in $\mathbb{Q}$ hebben geen grens in $\mathbb{Q}$, bijvoorbeeld

$$\mathcal{A}_1 = \mathbb{Q} \setminus \mathcal{A}_2 \quad \mathcal{A}_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \wedge x^2 > 2\} ;$$

de grens zou een getal moeten zijn waarvan het kwadraat twee is en zo'n getal is er niet in $\mathbb{Q}$.

Sneden die rationale grenzen hebben noemen we gelijk als de grenzen gelijk zijn; de eerste twee voorbeelden van sneden zijn dus gelijk.

Bij de opbouw van $\mathbb{R}$ met Dedekind-snedes bekijken we de verzameling $\mathbb{R}^D$ van Dedekind-snedes in $\mathbb{Q}$. We definiëren de bewerkingen en de ordening en laten zien dat de afbeelding die aan $x \in \mathbb{Q}$ de sneede met grens x toevoegt een injectief homomorfisme is van $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}^D$. $\mathbb{R}^D$ is dus een uitbreiding van $\mathbb{Q}$, en vervolgens wordt aangetoond dat $\mathbb{R}^D$ aan de gewenste axioma's voldoet. De geconstrueerde $\mathbb{R}^D$ is dus een structuur die als reële getallen $\mathbb{R}$ mag gelden.

Uit het volledigheidaxioma, dat in $\mathbb{R}$ geldt, kan men bewijzen dat ieder sneede in $\mathbb{R}$ een grens in $\mathbb{R}$ heeft. (Bij de constructieve opbouw kan men dat ook rechtstreeks bewijzen.) Dedekind zag in deze eigenschap, die hij intuïtief toeschreef aan het systeem van punten op een meetkundige lijn, de essentiële volledigheidseigenschap van $\mathbb{R}$; om die te verkrijgen voerde hij zijn opbouw van $\mathbb{R}$ met behulp van sneden in $\mathbb{Q}$ uit.

Het bedoelde verband tussen Eudoxus' theorie van verhoudingen en Dedekind-snedes is nu als volgt. Eudoxus noemt twee verhoudingen $a : b$ en $c : d$ gelijk indien voor elk tweetal natuurlijke getallen m en n geldt:

$$\begin{aligned}ma > nb &\iff mc > nd \\ ma = nb &\iff mc = nd \\ ma < nb &\iff mc < nd .\end{aligned}$$

Men kan dat zo opvatten dat hij bij iedere verhouding $a : b$ een verdeling van de positieve rationale getallen $\mathbb{Q}^+$ in drie klassen $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_0$ en $\mathcal{A}_2$ invoert en wel:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid ma > nb \right\} \\ \mathcal{A}_0 &= \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid ma = nb \right\} \\ \mathcal{A}_2 &= \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid ma < nb \right\} .\end{aligned}$$

Waarbij het opengelaten wordt of $\mathcal{A}_0$ leeg is of niet. Men kan makkelijk bewijzen dat, als we $\mathcal{A}_1$ uitbreiden met de 0 en de negatieve rationale getallen, $\mathcal{A}_1$ en $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_2$ een Dedekind-snedes in $\mathbb{Q}$ vormen, en dat Eudoxus' definitie van gelijkheid equivalent is met:

$a : b = c : d$ dan en slechts dan als de Dedekind-snedes geïnduceerd door $a : b$ gelijk is aan de snede geïnduceerd door $c : d$.

Deze vertaling van Eudoxus' definitie in termen van Dedekind-snedes heeft wel tot de opmerking geleid dat de Griekse wiskunde na Eudoxus in principe de beschikking had over een even sterk en exact middel als de moderne reële getallen. Inderdaad kan men met deze overweging begrijpen dat de Grieken moeilijke limietprocessen aankonden zoals die bijvoorbeeld optreden bij oppervlaktebepaling van kromlijnige figuren.

Toch is de overeenkomst misleidend; een aantal aspecten van het moderne begrip reëel getal ontbreken bij de Grieken. Allereerst beperkte de Griekse wiskunde zich tot positieve grootheden, dus kan het systeem van verhoudingen hooguit met $\mathbb{R}^+$ (dat wil zeggen $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$) overeen komen. Maar verder is er bij de Grieken geen wens te onderkennen om de verzameling van verhoudingen (overeenkomend met de verzameling der reële getallen) als basisdomein van de wiskunde te kiezen. Voor hen was een verhouding steeds een relatie tussen twee grootheden; het basisdomein van de wiskunde was dus dat der grootheden, en het begrip grootte werd niet verder gefundeerd.

Tenslotte is het in de moderne aanpak essentieel dat iedere snede overeenkomt met een reëel getal. Deze eigenschap stelt ons in staat existentiebewijzen te leveren, bijvoorbeeld voor limieten of voor nulpunten van continue functies. Bij de klassieke theorie van verhoudingen zien we wel dat iedere verhouding met een snede correspondeert maar niet dat omgekeerd iedere snede ook een verhouding vastlegt. Het Griekse systeem van (gelijksoortige, Archimedische, zie p. 37) grootheden zou dus minder rijk kunnen zijn dan $\mathbb{R}$. Voor existentiebewijzen heeft de Griekse wiskunde dan ook alleen het hulpmiddel van de meetkundige constructie, en daarmee komt men essentieel minder ver.

Literatuur

- Becker, O., *Das mathematische Denken der Antike*, Göttingen 1957.
 Becker, O. (ed), *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, Darmstadt 1965.
 Burkert, W., *Lore and science in ancient Pythagoreanism*, Cambridge (Mass) 1972.
 Dijksterhuis, E.J., *De Elementen van Euclides*, Groningen 1929–1930.
 Euclides, *The thirteen books of Euclid's Elements* (tr. intr. comm. Thomas L. Heath; herdruk van ed. 1926), 3 vols, New York, 1956.

- Fowler, D.H., *The mathematics of Plato's academy: a new reconstruction*, Oxford 1987.
- Fritz, K. von, *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Berlin 1971.
- Gericke, H., *Mathematik in Antike und Orient*, Berlin 1984.
- Heath, Th., *A history of greek mathematics*, Oxford 1921.
- Herz-Fischler, R., *A mathematical history of division in extreme and mean ratio*, Waterloo, 1987.
- Knorr, W.R., *The evolution of the Euclidean elements: a study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for early Greek geometry*, Dordrecht 1975.
- Mueller, I., *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*, Cambridge (Mass) 1981.
- Nelson, E. (ed), *Zeno and the discovery of incommensurables in Greek mathematics*, New York 1976.
- Szabo, A., *Anfänge der Griechischen Mathematik*, München 1969.
- Tannery, P., *La géométrie Grècque*, New York 1976 (oorspr. 1887).
- Waerden, B.L. v.d., *Ontwakende wetenschap*, Groningen 1950.
- Waerden, B.L. v.d., *Science awakening*, Groningen, 1954–1974.
- Waerden, B.L. v.d., *Die Pythagoreer, religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft*, Zürich 1979.

2 Descartes over de normaal aan de ellips (door J.A. van Maanen)

De tekst voor dit hoofdstuk is ontleend aan een publikatie van J.A. van Maanen: “De zeventiende eeuw in tien wiskundige problemen uit tien decennia”, *Vakantiecursus 1989, Wiskunde in de Gouden Eeuw* (red. A.W. Grootendorst, Amsterdam, CWI, 1989) pp. 15-78; hoofdstuk 4: “1631-1640: Descartes over de normaal aan de ellips”, pp. 30-37. Ik heb de tekst op enkele plaatsen aangepast voor opname in het diktaat. - HB.

Achtergrond

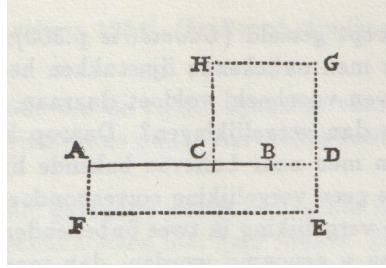
In 1637 zag de wiskunde er ineens anders uit, al duurde het wel enige tijd voordat ze in haar nieuwe gedaante algemeen aanvaard werd. Drie duizend jaar lang waren meetkunde en algebra gescheiden disciplines geweest, tot, in 1637, Descartes' *Géométrie*³ verscheen. Descartes (1596-1650) liet daarin zien hoe meetkundige objecten algebraïsch beschreven kunnen worden (een kromme in het platte vlak, bijvoorbeeld, door een vergelijking in twee onbekenden) en dat omgekeerd oplossingen van sommige algebraïsche problemen meetkundig geconstrueerd kunnen worden.

Een van de grondideeën van de *Géométrie* is dat algebra gebruikt kan worden om meetkundige constructieproblemen op te lossen. De analyse van een constructieprobleem (het opsporen van de constructiestappen) was erkend lastig. Soms bracht een listige hulplijn uitkomst, maar elk nieuw probleem vroeg weer een nieuwe listigheid. Met wat ervaring kon je een heel eind komen, maar dat nam de behoefte aan een algemeen geldig ‘recept’ niet weg. Descartes beschrijft zo'n recept in de *Géométrie* (p. 300-301). Het komt kort gezegd neer op het volgende: vertaal het meetkundige probleem in een vergelijking, los de vergelijking op, en vertaal de oplossing in constructiestappen. De eerste keer dat Descartes het recept toepast, doet hij dat om een open constructieprobleem uit de Griekse oudheid, het ‘probleem van Pappus’ op te lossen. De oplossing is vrij gecompliceerd, en daarom zullen we de werking van het recept bekijken aan de hand van een voorbeeld van Frans van Schooten Jr. Het is afkomstig uit een van de verhelderende commentaren die hij schreef bij de *Géométrie*.

Van Schooten draagt het volgende constructieprobleem aan:⁴ “Een gegeven lijnstuk AB , met ergens daarop C , zo door te trekken tot D dat de rechthoek met zijden AD en DB gelijk is aan het vierkant op zijde CD .”

³[Descartes 1637]

⁴[Descartes 1659] dl 1, p. 149



De figuur bij het probleem, Geometria 1659 p. 149

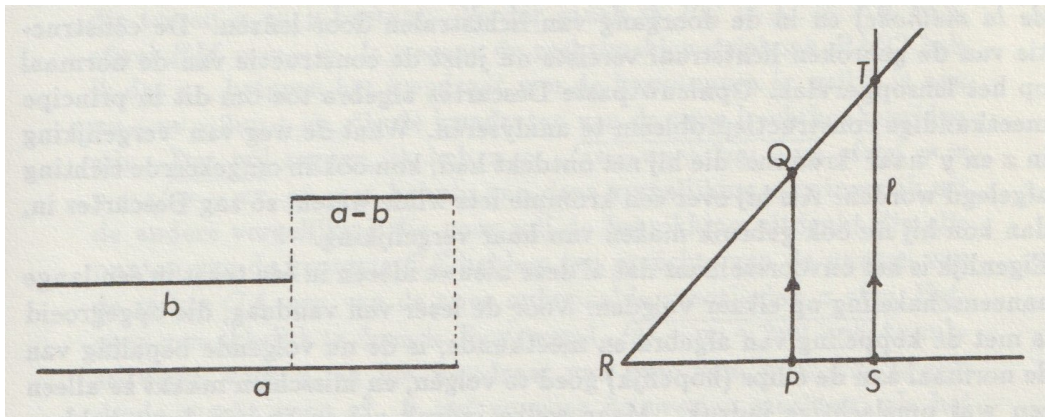
Volgens voorschrift van Descartes maakt Van Schooten een figuur (zie Figuur 6) waarin hij aanneemt dat hij D al gevonden heeft, en hij stelt de relevante lijnstukken met letters voor: $AC = a$, $CB = b$ en $BD = x$. De zijden van de rechthoek met zijden AD en BD ($ADEF$ in Fig.6) zijn dan: $AD = a + b + x$ en $BD = x$, zodat de oppervlakte gelijk is aan $(a + b + x)x$. Evenzo is de oppervlakte van het vierkant op zijde CD gelijk aan $(b + x)^2$. Het meetkundige probleem (BD te construeren zodanig dat rechthoek en vierkant gelijke oppervlakte hebben) is nu te vertalen in een algebraïsch probleem: x op te lossen uit

$$(a + b + x)x = (b + x)^2.$$

Dit geeft

$$x = \frac{b^2}{a - b}.$$

Tenslotte moet deze uitdrukking voor BD nog in constructiestappen vertaald worden. Van Schooten merkt daartoe op dat x moet voldoen aan de evenredigheid $x : b = b : (a - b)$, zodat een constructie met twee gelijkvormige driehoeken voldoet (zie Figuur 7). Dat zou als volgt kunnen (Van Schooten voert de constructie zelf niet uit). Eerst wordt $\triangle PQR$ getekend met zijden $PR = a - b$ en $QR = b$ (PQ vrij).



Meetkundige constructie van x

Vervolgens wordt op PR (of, als $b > \frac{1}{2}a$, op zijn verlengde) het punt S genomen zodat $RS = b$ en door S wordt evenwijdig aan PQ een lijn ℓ getekend, die RQ (of zijn verlengde) snijdt in T . Dan voldoet $RT = x$ aan $x : b = b : (a - b)$. Tot zover Van Schootens voorbeeld, terug naar 1637.

Descartes had in zijn recept gesteld (*Géométrie* p. 300): “Men moet evenveel vergelijkingen vinden als men onbekende lijnstukken heeft aangenomen.” Het door Van Schooten gegeven voorbeeld voldoet daaraan, maar wat te doen als er meer onbekenden zijn dan vergelijkingen? Daarop had Descartes als antwoord (p. 300): “Dan kan men naar believen bekende lijnstukken nemen voor alle onbekenden waarmee geen vergelijking correspondeert”. Als het probleem bijvoorbeeld leidt tot één vergelijking in twee onbekenden, die in navolging van Descartes sinds 1637 x en y genoemd worden, dan mag men voor y zelf een lijnstuk nemen en daarna ligt x door de vergelijking vast (zo doet Descartes het althans zelf, p. 313).

De volgende, volstrekt nieuwe stap in de *Géométrie* is het idee dat een paar lijnstukken x en y ten opzichte van coördinaatassen (“lignes principales”) een punt bepaalt, en dat de oplossingen van een vergelijking in twee onbekenden een kromme opleveren: “Wanneer men achtereenvolgens oneindig veel verschillende grootheden neemt voor het lijnstuk y , dan zal men er ook oneindig veel vinden voor het lijnstuk x , & zo zal men een oneindige veelheid aan verschillende punten hebben (...) door middel waarvan men de gevraagde kromme zal beschrijven”. (p. 313) Daarmee kreeg het begrip ‘kromme’ de nieuwe inhoud van meetkundige interpretatie van een vergelijking in twee onbekenden.

Maar Descartes ging verder. Want krommen hadden al een lange geschiedenis, en ook daarin speelden constructieproblemen een belangrijke rol. Een daarvan boeide Descartes in hoge mate, en wel de constructie van normalen. Hij was namelijk zeer geïnteresseerd in geometrische optica (een verhandeling daarover, onder de titel *Dioptrique*, verscheen in 1637, samen met de *Géométrie* en nog een stuk, als aanhangsel bij Descartes’ filosofische hoofdwerk *Discours de la méthode*) en in de doorgang van lichtstralen door lenzen. De constructie van de gebroken lichtstraal vereiste nu juist de constructie van de normaal op het lensoppervlak. Opnieuw paste Descartes algebra toe om dit in principe meetkundige constructieprobleem te analyseren. Want de weg van ‘vergelijking in x en y ’ naar ‘kromme’ die hij net ontdekt had, kon ook in omgekeerde richting afgelegd worden. Als hij over een kromme iets wilde weten, zo zag Descartes in, dan kon hij nu ook gebruik maken van haar vergelijking.

Eigenlijk is het onvoorstelbaar dat al deze nieuwe ideeën in één tekst in één lange aaneenschakeling op elkaar volgden. Voor de lezer van vandaag, die opgegroeid is met de koppeling van algebra en meetkunde, is de nu volgende bepaling van de normaal aan de ellips (hopelijk) goed te volgen, en misschien maakt ze alleen een wat omslachtige indruk. Maar welke indruk zal ze op een lezer hebben gemaakt voor wie algebra en meetkunde tot 1637 twee verschillende werelden waren geweest?

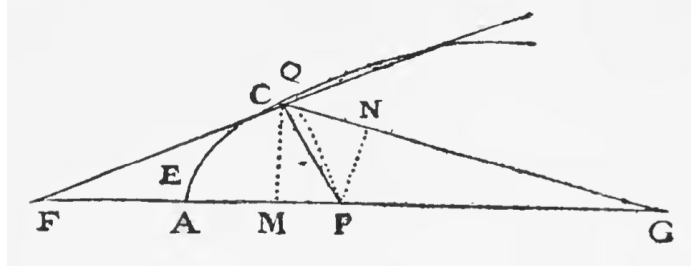
Het probleem

Bron: [Descartes 1637] pp. 342–343 en 345–348. Geciteerd zijn fragmenten van pp. 342–343 en 345–348.

“Algemene methode om de rechte lijnen te vinden die de gegeven krommen of hun raaklijnen onder een rechte hoek snijden.

Zij CE de kromme; gevraagd wordt een rechte lijn te trekken door het punt

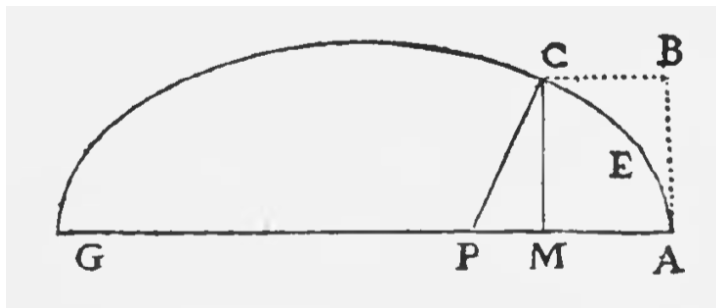
C , die rechte hoeken met haar maakt. Ik neem aan dat het gevraagde reeds uitgevoerd is, & dat CP de gezochte lijn is, die ik doortrek tot aan het punt P , waar ze de rechte



de bijbehorende figuur uit de *Géométrie*, p. 342

lijn GA ontmoet, die volgens mijn aanname dienst doet als referentielijn voor alle lijnstukken van de kromme CE : zodat ik met MA (of CB) = y , & CM (of BA) = x , een of andere vergelijking heb, die de betrekking uitdrukt die tussen x en y bestaat. Verder maak ik $PC = s$, & $PA = v$, ofwel $PM = v - y$, & wegens de rechthoekige driehoek PMC heb ik dat ss , hetgeen het kwadraat van de hypotenusa is, gelijk is aan $xx + vv - 2vy + yy$, die de kwadraten van de twee [rechthoeks]zijden zijn. Dat wil zeggen, ik heb $x = \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ ofwel $y = v + \sqrt{ss - xx}$, en met behulp van deze vergelijking elimineer ik uit de andere vergelijking die voor mij de betrekking uitdrukt die alle punten van de kromme CE hebben ten opzichte van de punten van de rechte GA , een van de twee onbepaalde grootheden x of y . Hetgeen gemakkelijk te doen is door overal $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ te substitueren voor x , en het kwadraat van deze som voor xx , & zijn derde macht voor x^3 , & net zo voor de overige machten, als het er om gaat x te elimineren; ofwel [p. 343] als het om y gaat, door daarvoor $x + \sqrt{ss - xx}$ te substitueren, of het kwadraat of de derde macht daarvan, etc. voor yy of y^3 etc. Zodat er steeds na afloop één vergelijking overblijft waarin nog maar één enkele onbepaalde, x , of y , voorkomt.

Zoals wanneer CE een Ellips is, en wanneer MA het stuk van zijn middellijn is, waarbij CM als ordinaat hoort, en die r heeft als latus rectum en q als latus transversum, dan heeft men wegens Stelling 13 van Boek I van Appolonius $xx = ry - \frac{r}{q}yy$, en



de bijbehorende figuur uit de *Géométrie*, p. 347

als men daaruit xx elimineert blijft over $ss - vv + 2vy - yy = ry - \frac{r}{q}yy$, ofwel $yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ gelijk aan niets. Want het is hier beter om de som als een geheel te beschouwen dan hem in de vorm te brengen waarin de ene kant gelijk is aan de andere”.

Vervolgens voert Descartes dit eliminatieproces ook uit voor twee andere krommen (pp. 344-345) en dan beschrijft hij wat er met de vergelijking moet gebeuren die na de zojuist beschreven eliminatie van x of y resulteert (p. 345):

“Welnu, nadat men een dergelijke vergelijking heeft gevonden, moet men die — in plaats van haar te gebruiken om de grootheden x , of y , of z aan de weet te komen, die reeds gegeven zijn, omdat het punt C gegeven is — gebruiken om v , of s , te vinden, die immers het gevraagde punt P bepalen. En hiertoe moet men zich realiseren dat, indien dit punt P voldoet aan de eis, de cirkel waarvan P het middelpunt zal zijn, & die door het punt C zal gaan, op die plaats de kromme CE zal raken zonder haar te snijden: maar dat als dit punt P ook maar iets dichter bij of iets verder van het punt [p. 346] A ligt dan zou moeten, de cirkel de kromme niet alleen in het punt C zal snijden maar noodzakelijk ook in een ander punt”.

Hierna betoogt Descartes dat de twee gevallen (de cirkel raakt de kromme in C of de cirkel snijdt de kromme in C en heeft in de omgeving van C nog een snijpunt met de kromme) weerspiegeld worden in de structuur van de resulterende vergelijking. Alleen als de resulterende vergelijking een van de twee gegeven coördinaten van C als dubbelwortel heeft, raakt de cirkel de kromme in C en is CP de normaal, en anders snijdt de cirkel de kromme in C . Daarmee is de normaalconstructie een algebraïsch probleem geworden: het bepalen van de parameters v en s zodat de resulterende vergelijking een gegeven getal als dubbelwortel heeft. Terug naar de *Géométrie* (p. 347):

“Voorts moet men bedenken dat een vergelijking, als er twee gelijke wortels in voorkomen, van dezelfde gedaante moet zijn als de vergelijking die men krijgt door de grootheid die men als onbekende heeft aangenomen min de bekende grootheid die daaraan gelijk is met zichzelf te vermenigvuldigen, en die men vervolgens - als deze laatste uitdrukking niet hetzelfde aantal dimensies [dwz dezelfde graad] heeft als de voorgaande [dwz de resulterende vergelijking] vermenigvuldigt met een andere veelterm die het ontbrekende aantal dimensies heeft. Zo kan men dan tenslotte afzonderlijke vergelijkingen opstellen tussen elk van de termen van de ene uitdrukking, & elk van de termen van de andere. Zoals ik bijvoorbeeld zeg dat de eerste hieronder gevonden vergelijking,⁵ te weten

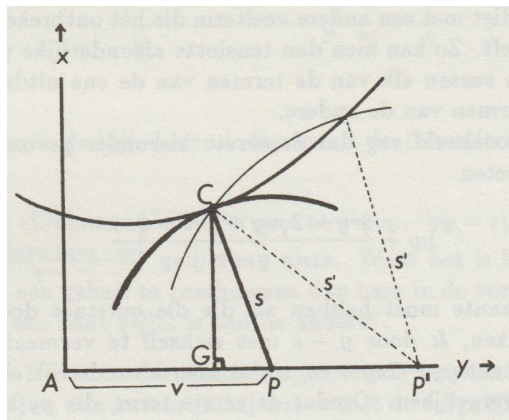
$$yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$$

dezelfde gedaante moet hebben als die die ontstaat door e gelijk aan y te maken, & door $y - e$ met zichzelf te vermenigvuldigen, waaruit ontstaat $yy - 2ey + ee$, zodat men afzonderlijk elk van hun termen kan vergelijken.

⁵Hoewel het tweede lid ontbreekt gebruikt Descartes hier toch de term “équation”.

$v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, ofwel (omdat we e gelijk aan y hebben verondersteld) $v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. En [p. 348] op dezelfde wijze zou men ook s kunnen vinden via de derde term $ee = \frac{qvv - qss}{q - r}$, maar omdat de grootheid v het punt P voldoende bepaalt en P het enige is wat we zoeken, is het niet nodig om nog verder te gaan”.

In een enigszins gemoderniseerde parafrase komt Descartes' methode op het volgende neer. Hij heeft een algebraïsche kromme K gegeven door de vergelijking $f(x, y) = 0$, en een punt $C(x_0, y_0)$ op K , waarin hij de normaal aan K wil bepalen.



Hij bekijkt de verzameling cirkels die door het vaste punt C gaan en die hun middelpunt op de y -as⁶ hebben (zie fig. 11). Laat $P(0, v)$ het middelpunt van zo'n cirkel zijn en $PC = s$ de straal. Als CP de normaal is moeten v en s zodanig zijn dat het stelsel

47

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ x^2 + (y - v)^2 = s^2 \end{cases} \quad (I)$$

twee samenvallende snijpunten (x_0, y_0) heeft. Als dus, zoals Descartes doet, x uit (I) geëlimineerd wordt, dan moet de resulterende vergelijking in y het gegeven getal y_0 als dubbelwortel hebben. Op grond daarvan moeten v en s bepaald worden.

Laat na eliminatie van x

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y + a_0 = 0 \quad (II)$$

de uit (I) resulterende vergelijking zijn. Deze heeft een dubbelwortel $y = y_0$ (Descartes schrijft $y = e$, en bij hem is e dus één verder vast te houden waarde die y kan aannemen. De notatie e voor het grondtal van de natuurlijke logaritme dateert pas uit de achttiende eeuw) en moet dus van de gedaante

$$(y - y_0)^2 P(y) = 0 \quad (III)$$

zijn. In (III) is P een veelterm van graad $n - 2$, waarin de kopcoëfficiënt 1 is en de overige $n - 2$ coëfficiënten nog niet vastliggen. Door nu de n coëfficiënten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ van (II), waarin de twee parameters s en v voorkomen, te vergelijken met de overeenkomstige coëfficiënten van (III), waarin de $n - 2$ nog onbekende coëfficiënten van P voorkomen, vindt Descartes een stelsel van n vergelijkingen in n onbekenden. Omdat de plaats van P alleen van v afhangt hoeft uit dit stelsel alleen v opgelost te worden.

Om dit principe op de ellips toe te passen stelde Descartes een vergelijking van de ellips op. De vergelijking $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$, is een directe vertaling van een door Apollonius (c.262 - c.190 v. Chr) in meetkundige termen geformuleerde eigenschap van de ellips. De ‘latus rectum’ r en ‘latus transversum’ q zijn de lijnstukken die in de klassieke meetkundige definitie de ellips vastleggen. Het voert te ver om hier verder op de klassieke theorie van kegelsneden in te gaan maar het zal duidelijk zijn dat de vanzelfsprekendheid waarmee Descartes de vergelijking poneert hem door veel van zijn lezers niet in dank afgenomen zal zijn.

De stappen zijn nu duidelijk:

$$\begin{cases} x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2 \\ x^2 + (y - v)^2 = s^2 \end{cases} \quad (I)$$

heeft een dubbele oplossing (x_0, y_0) . Eliminatie van x uit (I) geeft

$$y^2 + \frac{qr - 2qv}{q - r}y + \frac{qv^2 - qs^2}{q - r} = 0 \quad (II)$$

en omdat (II) een dubbele wortel y_0 heeft, heeft (II) de gedaante

$$(y - y_0)^2 = y^2 - 2y_0y + y_0^2 = 0 \quad (III).$$

Vergelijking van de coëfficiënten van y in (II) en (III) geeft

$$\frac{qr - 2qv}{q - r} = -2y_0,$$

waaruit v bepaald moet worden:

$$v = y_0 - \frac{r}{q}y_0 + \frac{r}{2}.$$

Eigenlijk zou nu de normaal nog geconstrueerd moeten worden, maar dat doet Descartes niet meer, want “het is altijd gemakkelijk om ze [dwz. de constructies] te vinden” (p. 351).

Literatuur

BARON, M.E., *The origins of the infinitesimal calculus*, Oxford 1969.

BOYER, C.B., *History of analytic geometry*, New York 1956.

DESCARTES, R. [1637] *La Géométrie*, essay (pp. 297-413) bij *Discours de la méthode ...*, Leiden (Jean le Maire) 1637, herdrukt in facsimile met Engelse vertaling in [DESCARTES 1954].

DESCARTES, R. [1659], *Geometria à Renato Des Cartes Anno 1637 Gallicè edita; postea autem ... in Latinam versa, & Commentariis illustrata ...* (uitgeg. d. F. van Schooten) (2 delen), Amsterdam 1659–1661.

DESCARTES, R. [1954], *The geometry of René Descartes. With a facsimile of the first edition* (ed. D.E. SMITH and M.L. LATHAM) New York (Dover) 1954.

EDWARDS, C.H. Jr, *The historical development of the calculus*, New York 1979.

GRATTAN-GUINNESS, I. (ed), *From the calculus to set-theory 1630- 1910, an introductory history*, London 1980.

3 Leibniz en de Differentiaal- en Integraalrekening

Leibniz en Newton

In de jaren 1660-1680 ‘ontdekten’ Isaac Newton (1643-1727) en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) onafhankelijk van elkaar de differentiaal- en integraalrekening. Het duurde enige tijd voordat zij hun vondsten publiceerden (Newton 1687, Leibniz 1684).

Newton’s grondbegrip was de *fluxie*. Hij vatte variabelen op als veranderend met de tijd; de fluxie $\dot{x}$ van een variabele x was volgens Newton de snelheid waarmee x varieert (modern: als $x = f(t)$, dan $\dot{x} = f'(t)$).

Leibniz werkte met oneindig kleine *differentialen*. Hij stelde zich voor dat een variabele een oneindige rij oneindig dicht bij elkaar liggende waarden doorloopt. De differentiaal dx van een variabele x was dan volgens Leibniz het (oneindig kleine) verschil tussen twee naastliggende waarden in die rij (dus $dx = x^I - x$, als x en x^I twee zulke opvolgende waarden zijn in de rij die x doorloopt).

Door het werk van latere wiskundigen (in het bijzonder Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Guillaume F. de l’Hôpital (1661- 1704), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph L. Lagrange (1736-1813) en Augustin-Louis Cauchy (1784-1857)), ontwikkelde zich de differentiaal- en integraalrekening tot een theorie over functies (in plaats van variabelen) en het differentiëren en integreren van die functies.

Hierboven is het woord ontdekken tussen aanhalingstekens gezet. Leibniz’ en Newton’s vondsten kwamen namelijk niet zomaar uit de lucht vallen. In de 17e eeuw waren vele wiskundigen op zoek naar nieuwe methoden voor het oplossen van problemen omtrent krommen (vooral de bepaling van raaklijnen en oppervlakken), en een aantal van hun methoden kunnen als voorlopers van de differentiaal- en integraalrekening worden opgevat. Ook creëerden Newton en Leibniz niet de differentiaal- en integraalrekening zoals wij die nu kennen; hun methoden verschillen vrij sterk van de moderne. Toch zijn er goede redenen om in het geval van Newton’s en Leibniz’ vondsten van de ontdekking van de differentiaal- en integraalrekening te spreken. Die redenen zijn:

- Hun methoden gelden in principe voor alle krommen (modern: voor alle functies). Vóór Leibniz en Newton waren er wel al differentieer- en integreermethoden gevonden, maar die waren alleen toepasbaar op speciale algebraïsche krommen.
- In hun methoden kan de hoofdstelling van de differentiaal- en integraalrekening onderkend worden. (Die hoofdstelling zegt dat differentiëren en integreren inverse operaties zijn.)
- Beide methoden gebruikten een nieuw en succesvol systeem van symbolen en notaties.

Leibniz’ studies uit October-November 1675

Uit de heel gecompliceerde geschiedenis van de ontwikkeling van de differentiaal- en integraalrekening lichten we in dit hoofdstuk één episode, namelijk hoe Leibniz er toe kwam de symbolen d en $\int$, en de rekenregels ervoor in te voeren. Hij deed dat in 1675 en de

manuscripten van zijn studies zijn bewaard gebleven; we kunnen zijn gedachtengang dus stap voor stap volgen. Het is vrij zeldzaam dat men zo precies de gedachtengang bij een wiskundige ontdekking kan volgen; dat maakt de manuscripten erg belangrijk. Ook komt Leibniz' speciale, bijna strategische manier van denken over de wiskunde heel duidelijk tot uitdrukking in deze studies.

We geven eerst een korte omschrijving van drie kernideeën die Leibniz in de jaren vóór 1675 ontwikkeld had en die een centrale rol speelden bij zijn ontdekking van de differentiaal- en integraalrekening; daarna bespreken we de ontdekking zelf aan de hand van tekstfragmenten uit de manuscripten van October-November 1675.

Drie kernideeën

Vanuit filosofische overwegingen was Leibniz erg geïnteresseerd in het uitwerken van wat hij noemde een 'Characteristica generalis', een algemene symbooltaal. Het idee daarbij was om symbolen in te voeren voor de onderdelen van filosofische argumenten. De regels van de logica zouden dan de vorm krijgen van rekenregels voor deze symbolen, en filosofische argumenten zouden eenvoudig op hun juistheid gecontroleerd kunnen worden door te kijken of de rekenregels correct waren toegepast. Een van de drie kernideeën die in Leibniz' ontdekking hebben meegespeeld, staat hiermee in verband, namelijk zijn grote interesse in wiskundige notaties en symbolen en de regels waaraan zulke symbolen moeten voldoen.

Het tweede kernidee betrof reeksen, somreeksen en verschilreeksen. Leibniz bestudeerde deze in 1672-73, in het bijzonder de reeks

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}, \dots$$

waarbij in de noemers de zogenaamde 'driehoeksgetallen'

$$\frac{r(r+1)}{2}, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

staan. Christiaan Huygens (1629-1695) had Leibniz gevraagd of hij deze reeks kon sommen. Leibniz merkte op dat de termen van de reeks precies de verschillen zijn tussen opeenvolgende termen van de reeks

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \dots,$$

immers

$$\frac{2}{r(r+1)} = \frac{2}{r} - \frac{2}{r+1}.$$

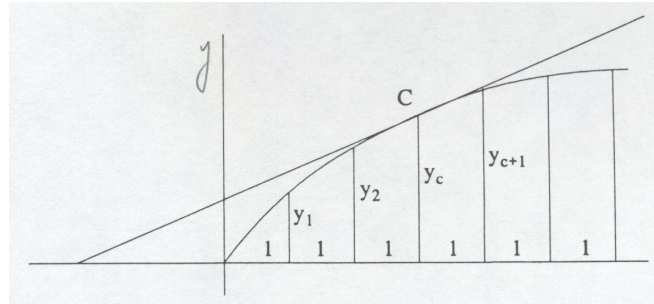
Nu is de sommatie makkelijk:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{2}{r(r+1)} = \\ &= \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) + \dots + \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r+1}\right) = \end{aligned}$$

$$= 2 - \frac{2}{r+1}.$$

In het bijzonder is de som van de oneindig voortlopende reeks gelijk aan 2.

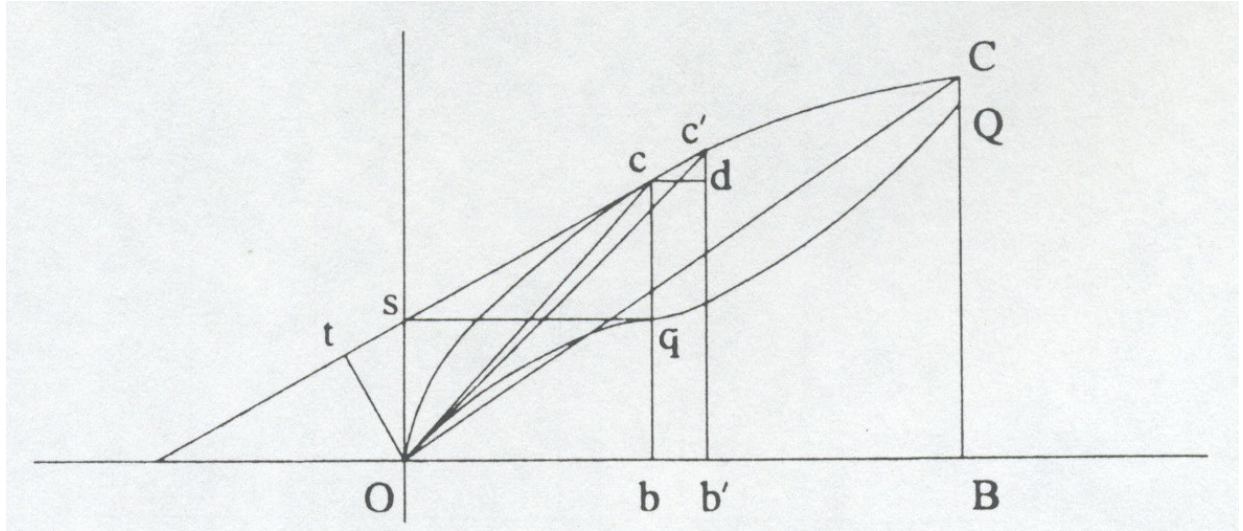
Leibniz concludeerde hieruit in het algemeen dat het sommeren van een reeks eenvoudig is als je de reeks kunt interpreteren als verschilreeks van een andere. Hij gaf ook een meetkundige interpretatie van dit inzicht (zie Figuur 1). Het oppervlak onder een kromme kan in verband gebracht worden met de som van een reeks. Beschouw de reeks van ordinaten y op onderlinge afstand 1. Het oppervlak van de kromme is dan bij benadering gelijk aan $\sum y_i$.



Figuur 1. Som- en verschilreeks bij een kromme

Die benadering wordt beter naarmate de eenheid kleiner wordt genomen. Verder kan de raaklijn aan de kromme, bijvoorbeeld in punt C, in verband worden gebracht met verschillen tussen de termen van de reeks der ordinaten, immers de tangens van de hoek die de raaklijn in C met de X-as maakt is bij benadering gelijk aan $y_{c+1} - y_c$. Die benadering wordt beter naarmate de eenheid kleiner genomen wordt. Leibniz zag hierin een aanwijzing dat er een reciproke relatie moest bestaan tussen het raaklijnprobleem en het oppervlakteprobleem, en hij stelde zich als doel een ‘calculus’, een rekenwijze, te ontwikkelen voor zulke meetkundig geïnterpreteerde som-reeksen en verschillen, waarbij de verschillen (en dus de afstanden tussen de opvolgende ordinaten onder de kromme) oneindig klein genomen zouden moeten worden. Dit was het tweede kernidee dat meespeelde in de ontdekking van 1675.

Het derde idee betrof transformatie van oppervlakken. Leibniz verdiepte zich in 1672-73 in vroegere werken over berekening van oppervlakken onder krommen en verwante problemen (inhouden, zwaartepunten en booglengten bijvoorbeeld). Hij kwam daarbij een aantal transformaties van oppervlakken tegen en wel transformaties waarbij infinitesimale onderdelen van de ene figuur overgaan in infinitesimale delen van gelijk oppervlak in de andere figuur. Het oppervlak van de eerste figuur is dan af te leiden uit dat van het tweede. Ter illustratie volgt hier een transformatie die Leibniz zelf in 1673 uitvond. We geven deze transformatie zonder bewijs; de lezer kan met behulp van differentiaal- en integraalrekening makkelijk nagaan dat het klopt, en zo’n controle is verhelderend omdat men daarmee ook zien kan welke stelling uit de differentiaal en integraalrekening verborgen zit achter het meetkundige procédé dat Leibniz uitwerkte.



Figuur 2. Bij Leibniz' transformatiestelling

Beschouw een kromme OC (zie Figuur 2). OQ is de kromme die gevormd is door in ieder punt c van OC de raaklijn te trekken, het snijpunt s daarvan met de Y -as te bepalen, en langs bc de lengte $bq = Os$ uit te zetten. De punten q liggen op de kromme OQ . Er geldt dan de volgende gelijkheid tussen infinitesimale oppervlaktedelen:

$$\triangle Occ' = \frac{1}{2}bb' \times bq.$$

Daaruit is de volgende gelijkheid tussen eindige oppervlakken af te leiden:

$$\text{Oppervlak } OcCB = \frac{1}{2}(\text{Oppervlak } OqQB) + \text{Driehoek } OCB.$$

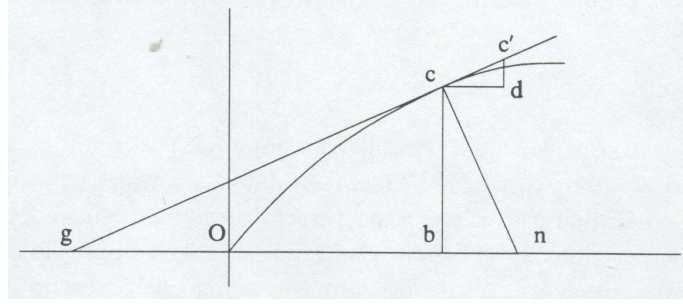
Als nu het oppervlak $OqQB$ bekend is kan hieruit het oppervlak $OcCB$ berekend worden.

Leibniz heeft met behulp van deze transformatie het oppervlak van de cirkel bestudeerd en vond daarbij de beroemde reeks voor π :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

(Zie voor verdere uitleg het boek van Baron-Bos, pp. 40-41.)

Voor de latere 'ontdekking' zijn Leibniz' studies over transformaties van belang geweest omdat hij er uit leerde dat een 'calculus' voor oppervlakken en raaklijnen in staat zou moeten zijn om dit soort transformaties in symbolen weer te geven. Ook onderkende Leibniz in deze studies het belang van de 'karakteristieke driehoek'. Dat is het oneindig kleine driehoekje $cc'd$ (zie Figuur 3) dat gelijkvorming is met de driehoeken cnb en gcb . Deze gelijkvormigheden worden gebruikt bij het vinden van transformaties en het bepalen van raaklijnen.



Figuur 3. De karakteristieke driehoek

Leibniz' vondst

We volgen nu Leibniz' gedachtengang aan de hand van de belangrijkste passages uit de manuscripten van 25 October - 11 November 1675. De tekst is in het Latijn; we geven de Engelse vertaling van Child (zie de literatuurlijst).

In het eerste stuk bestudeert Leibniz oppervlakken onder krommen en het mechanisch moment van lijnstukken ten opzichte van een as. Hij gebruikt daarbij een formalisme waarin de afkorting 'omn.' optreedt. Dit staat voor 'omnes', of voluit 'omnes lineae', 'alle lijnen'. Hiermee wordt bedoeld het geheel van alle lijnen in een oppervlak die evenwijdig zijn aan een as. Bonaventura Cavalieri (1598-1647) gebruikte deze term en de afkorting voor het eerst en werkte met behulp ervan een methode uit voor het berekenen van oppervlakken. *Omn. y* is dus het samenstel van alle ordinaten *y* onder de kromme; Cavalieri rekende ermee alsof dat gelijk was aan het oppervlak onder de kromme.

De eerste belangrijke passage uit Leibniz' manuscript is als volgt (zie voor uitleg het commentaar):

Here is another consideration.

The moments of the differences about a straight line perpendicular to the axis are equal to the complement of the sum of the terms; and the moments of the terms are equal to the complement of the sum of the sums, i. e.,

$$omn.\overline{xw} \sqcap ult.x, \overline{omn.w}, -\overline{omn.omn.w}$$

Let $xw \sqcap az$, then $w \sqcap \frac{az}{x}$, and we have

$$omn.az \sqcap ult.x, omn.\frac{az}{x} - omn.omn.\frac{az}{x} ;$$

hence

$$omn.\frac{az}{x} \sqcap ult.x omn.\frac{az}{x^2} - omn.omn.\frac{az}{x^2} ;$$

inserting this value in the preceding equation, we have

$$\begin{aligned} omn.az \sqcap & ult.x^2 omn.\frac{az}{x^2} - \overline{ult.x, omn.omn.\frac{az}{x^2}}, - \\ & - \overline{omn.ult.x, omn.\frac{az}{x^2}} - \overline{omn.omn.\frac{az}{x^2}} ; \end{aligned}$$

and this can proceed in this manner indefinitely.

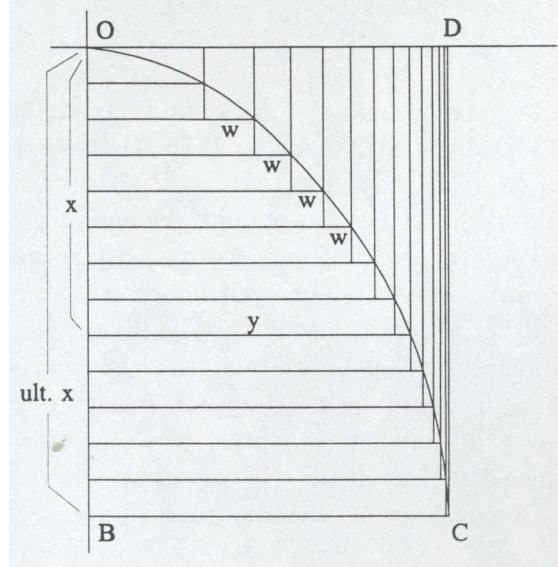
Again,

$$omn.\frac{a}{x} \sqcap x\ omn.\frac{a}{x^2} - omn.omn.\frac{a}{x^2},$$

and

$$omn.a \sqcap ult.x\ omn.\frac{a}{x} - omn.omn.\frac{a}{x};$$

the last theorem expresses the sum of logarithms in terms of the known quadrature of the hyperbola. (Child, pp. 70-71)



Figuur 4. Bij Leibniz' tekst over momenten

Commentaar: Figuur 4 geeft een uitwerking van Leibniz' schetsmatige tekening. Leibniz beschouwde een reeks ordinaten y van de kromme OC (Leibniz neemt hier de X -as verticaal). De onderlinge afstand van de ordinaten is de (oneindig kleine) eenheid. De verschillen van opvolgende ordinaten heten w . Dan hebben we:

$$oppervlak\ OBC = \text{som der ordinaten } y.$$

Verder

$$w \times x = \text{mechanisch moment van } w \text{ t.o.v. as } OD.$$

(Mechanisch moment = gewicht $\times$ arm; het gewicht van een lijnstuk wordt hier gelijk genomen aan zijn lengte.) Dus is

$$\begin{aligned} Oppervlak\ ODC &= \text{Som der } w \times x \\ &= \text{Totale moment van de verschillen } w. \end{aligned}$$

Tenslotte is

$$Oppervlak\ OCB = \text{Complement van } oppervlak\ OCD \text{ in rechthoek } ODCB.$$

Dit alles vat Leibniz samen in het eerste stuk van de eerste zin:

The moments of the differences about a straight line perpendicular to the axis [dus de som der $w \times x$, of het oppervlak ODC] are equal to the complement of the sum of the terms [dus $ODCB - (\text{som der ordinaten}) = ODCB - OCB = ODC$].

Nu overweegt Leibniz dat het hier gaat om een uitspraak over een reeks (n.l. de y 's) en de bijbehorende verschilreeks (n.l. de w 's). Maar dat kan ook zó opgevat worden dat de w 's een reeks vormen en de y 's de bijbehorende somreeks; inderdaad is iedere ordinaat y gelijk aan de som der w 's van de voorgaande ordinaten. Leibniz schrijft nu 'termen' voor de 'verschillen' (w), en 'som der termen' voor de 'termen' (y). Het resultaat is het tweede gedeelte van de eerste zin:

and the moments of the terms are equal to the complement of the sum of the sums.

Merk op hoe Leibniz hier het boven besproken kernidee over de relatie tussen som- en verschilreeksen hanteert.

Nu schrijft Leibniz het resultaat in formulevorm waarbij hij '*omn.*' gebruikt voor som. Verder gebruikt hij strepen waar wij haakjes zouden gebruiken, $\overline{xw}$ staat dus voor (xw) . $\sqcap$ is zijn gelijkteken. '*ult.x*' staat voor 'ultimus x', 'de laatste x', dus OB .

$$\underbrace{\overline{omn.xw}}_{\substack{\text{moment van} \\ \text{de termen } w, \\ \text{dus } ODC}} \sqcap \underbrace{\overline{ult.x, omn.w}}_{\substack{\text{totaal, n.l.} \\ OB \times OD, \text{ want} \\ OD = \text{som der } w}} - \underbrace{\overline{omn.omn.w}}_{\substack{\text{som van de som van} \\ \text{de termen dus som} \\ \text{van de } y, \text{ dus } OBC}}$$

In de volgende regels experimenteert Leibniz met deze formules door substituties uit te voeren. Eerst substitueert hij

$$xw = az,$$

dan treedt in het rechterlid $omn.\frac{az}{x}$ op; die kan weer uit de oorspronkelijke formule gehaald worden door substitutie

$$xw = \frac{az}{x}.$$

Leibniz merkt op dat je zo door kunt gaan; er ontstaan ingewikkelde formules. Daarna bekijkt Leibniz twee verdere substituties:

$$xw = \frac{a}{x} \text{ en } xw = a.$$

De laatste levert

$$omn.a \sqcap \overline{ult.x omn.\frac{a}{x}} - \overline{omn.omn.\frac{a}{x}}.$$

Deze formule interpreteert Leibniz als volgt: $Omn.a$ is een rechthoek en dus bekend. $Omn.\frac{a}{x}$ is het oppervlak onder de hyperbool $y = \frac{a}{x}$; daarvan is bekend dat het een logaritmehoe is (modern: $\int \frac{a}{x} dx = a \ln x$). $Omn.omn.\frac{a}{x}$ is dus de 'som der logaritmen', of het oppervlak onder de kromme $y = a \ln x$. Leibniz zegt het zo:

The last theorem expresses the sum of the logarithms [dus $omn.omn.\frac{a}{x}$] in terms of the known quadrature of the hyperbola [dus $omn.\frac{a}{x}$].

Uit de passage blijkt hoe Leibniz bewust op zoek was naar nieuwe formules over verbanden tussen oppervlakken. Ook blijkt Leibniz' grote interesse in notatie, symbolen en formules. Zodra hij een formule gevonden heeft onderzoekt hij wat formele manipulaties met de symbolen opleveren, zonder zich daarbij veel om de interpretatie van de formules te bekommeren (inderdaad is het moeilijk een sluitende interpretatie voor al de formules uit het geciteerde stuk te geven).

Enige dagen later komt Leibniz op de boven behandelde onderzoeken terug. Hij noteert:

Another theorem of the same kind is:

$$omn.xl = xomn.l - omn.omn.l .$$

where l is taken to be a term of a progression, and x is the number which expresses the position or order of the l corresponding to it; or x is the ordinal number and l the ordered thing. (Ibid. p. 80)

De formule is dezelfde als voorheen, nu met l in plaats van w . Merk op hoe duidelijk Leibniz hier de opvatting formuleert dat de ordinaten l een reeks vormen waarbij de abscis x optreedt als rangnummer van de corresponderende l .

Nu merkt Leibniz een homogeniteitsbeginsel op in de formules: voorvoegen van 'omn.' maakt van een (dimensieloze) verhouding een lijn, van een lijn een oppervlak van een oppervlak een inhoud, etc. Hij formuleert dit als volgt:

N.B. In these calculations a law governing things of the same kind can be noted: for, if *omn.* is prefixed to a number or a ratio, or to something indefinitely small, then a line is produced, also if to a line, then a surface, or if to a surface, then a solid; and so on to infinity for higher dimensions. (Ibid., p. 80)

[Leibniz zegt ook dat, als *omn.* wordt toegepast op een oneindig kleine lijn, er een lijn ontstaat. Dit is eigenlijk in tegenspraak met zijn overige beweringen (logisch zou zijn dat er een oneindig klein oppervlak ontstaat, immers in de andere gevallen verandert wél de dimensie maar niet de eindigheid). Dit heeft te maken met het feit dat Leibniz bij deze onderzoeken het oneindig kleine eenheidslijnstuk meestal niet in zijn formules noteert. Bij het sommeren van oneindig kleine lijnstukken komt er in plaats van de oneindig kleine eenheid een oneindig klein lijnstuk, en dat staat wél in de formule vermeld, vandaar de verwarring. Later heeft Leibniz deze inconsistentie uit zijn systeem verwijderd.]

De ontdekte homogeniteit in *omn.*-formules brengt Leibniz ertoe in plaats van *omn.* een symbool te schrijven bestaande uit één letter - dan kan namelijk de dimensie van een term bepaald worden door het aantal letters er in te tellen. Leibniz kiest als letter de $\int$, dat is de geschreven lange vorm van de letter s , de eerste letter van 'summa', 'som'. We zien hier dus het eerste optreden van het symbool dat zich later tot het integraal-teken $\int$ ontwikkelde:

It will be useful to write $\int$ for *omn.*, so that $\int l = omn.l$, or the sum of the l 's. Thus,

$$\int \frac{\overline{l^2}}{2} = \iint \overline{\bar{l}} \frac{\bar{l}}{a}, \text{ and } \int \overline{xl} = x \int \bar{l} - \iint l .$$

From this it will appear that a law of things of the same kind should always be noted, as is useful in obviating errors of calculation. (Ibid., pp. 80-81)

Direct noteert Leibniz een aantal zaken over de werking van het symbool $\int$. Hij concludeert deze uit de analogie met som en verschilreeksen: als je de somreeks kent is de reeks zelf te bepalen; het omgekeerde probleem, uit de verschilreeks de reeks zelf af te leiden, is niet rechtstreeks oplosbaar. Verder noteert Leibniz nog eens dat de verschillen van de reeksen hier oneindig klein moeten zijn:

N.B. If $\int l$ is given analytically, then l is also given; therefore if $\int\int l$ is given, so also is l ; but if l is given, $\int l$ is not given as well. In all cases $\int x = x^2/2$.

N.B. All these theorems are true for series in which the differences of the terms bear to the terms themselves a ratio that is less than any assignable quantity.

$$\int x^2 = \frac{x^3}{3}.$$

(Ibid., p. 81)

Zo werd het $\int$ symbool ingevoerd onder invloed van overwegingen over homogeniteit en de wens de symbolen zo te kiezen dat die homogeniteit direct tot uitdrukking komt in de formules.

Vrij snel hierna voerde Leibniz ook het symbool d in. De passage waar dat gebeurt is:

Given l and its relation to x , to find $\int l$. This is to be obtained from the contrary calculus, that is to say, suppose that $\int l = ya$. Let $l = ya/d$; then just as $\int$ will increase, so d will diminish the dimensions. But $\int$ means a sum, and d a difference. From the given y , we can always find y/d or l , that is, the difference of the y 's. (Ibid., p. 82)

De gedachtengang hierachter is deze: Leibniz onderkent als belangrijkste probleem het quadratuurprobleem (modern: integratie): als een kromme gegeven is, dat wil zeggen dat de relatie tussen ordinaat l en abscis x gegeven is (modern: de functie $l(x)$), dan moet de quadratuur $\int l$ (modern $\int l(x)dx$) gevonden worden. Dat is moeilijk en het kan niet rechtstreeks. Leibniz stelt zich daarom voor eerst precies de relatie

$$\int l \rightarrow l$$

te onderzoeken, daarvoor een 'calculus' (rekenwijze) uit te werken, en dan die rekenwijze om te keren ('contrary calculus') om zo de relatie

$$l \rightarrow \int l$$

onder de knie te krijgen. Leibniz stelt

$$\int l = ya$$

(de a vanwege de homogeniteit, $\int l$ is namelijk een oppervlak) en hij vraagt zich af hoe y van l afhangt. Hij voert eerst een nieuw symbool in om deze relatie te noteren:

$$\int l = ya \rightarrow l = \frac{ya}{d}.$$

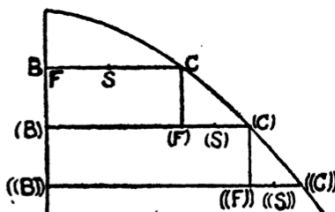
De keuze en plaatsing van het symbool d is bepaald door:

- een overweging van het verband met som en verschilreeksen; d is de eerste letter van ‘differentia’, ‘verschil’,
- een dimensieoverweging; l is ééndimensionaal, dus moet de letter d in de noemer geplaatst worden.

De passage is een sterk voorbeeld van Leibniz’ programmatische, bijna strategische manier van denken over de wiskunde; zijn eerste doel is niet problemen op te lossen, maar methoden en theorieën te scheppen.

Leibniz zag vrij snel dat het onhandig is om het symbool d in de noemer te plaatsen. Hij liet daarom de dimensionele interpretatie van d (en van $\int$) los en schreef $d\overline{xw}$ voor $\frac{xw}{d}$. Zo ontstond het d -symbool zoals dat nu nog in gebruik is.

Leibniz experimenteert nu met zijn nieuwe symbolen door overwegingen over oppervlakken en momenten te vertalen in de nieuwe formuletaal. Een voorbeeld is de volgende passage (de interpretatie wordt aan de lezer overgelaten):



Figuur 5.

In the attached figure [see Figure 5] let $BC = y$, $FC = dy$; let S be the middle point of FC ; then it is evident that the moment of FC is the rectangle contained by FC and BS , i.e., the rectangle BFC ; this follows from the fact that it is equal to $BFC + SFC$, and the latter can be neglected as being infinitely small compared to the former.

Hence $\int ydy = y^2/2$, or the moment of all the differences FC will be equal to the moment of the last term, and $ydy = d(y^2/2)$, or $y^2dy = ydy^2/2$. (Ibid., p. 98)

Daarna onderzoekt Leibniz de rekenregels voor het d -symbool. $d(x \pm y) = dx \pm dy$ ligt voor de hand. Leibniz vermoedt eerst dat

$$d(uv) = dudv.$$

In de volgende passage komt hij tot de conclusie dat dat niet zo is:

Hence it appears that it is incorrect to say that $dvd\psi$ is the same thing as $dv\psi$, or that $\frac{dv}{d\psi} = d\frac{v}{\psi}$; although just above I stated that this was the case, and it appeared to be proved. This is a difficult point. But now I see how this is to be settled.

If we have v and ψ , and they form some quantity, say $\phi = v\psi$ or v/ψ , and if the values of v and ψ are expressed as rationals in terms of some one thing, for instance, in terms of the abscissa x , then the calculus will always show that the same difference is produced, and that $d\phi$ is the same as $dvd\psi$ or $dv/d\psi$. But now I see the former can never happen, nor can it come to the latter by separation of parts; for example,

$$x + \beta, \frown x + \beta, , -, x, x; \text{ becomes } 2\beta x ,$$

which is quite a different thing from

$$x + \beta, -x, , \frown x + \beta, -x \text{ which gives } \beta^2 .$$

Hence it must be concluded that $dv\psi$ is not the same as $dvd\psi$, and $d\frac{v}{\psi}$ is not the same as $\frac{dv}{d\psi}$. (Ibid., pp. 101-102)

Leibniz gebruikt hier in de formules komma's als scheidingstekens (in plaats van haakjes als samenvoegtekens) en het symbool $\frown$ voor vermenigvuldiging. De formules moeten dus zo gelezen worden:

$$(x + \beta)(x + \beta) - xx = 2\beta x \quad (\beta^2 \text{ is verwaarloosd})$$

$$(x + \beta - x)(x + \beta - x) = \beta^2 .$$

Blijkbaar beschouwt Leibniz als tegenvoorbeeld tegen de veronderstelling dat $d(uv) = dudv$, het geval $u = v = x$. Hij beschouwt een oneindig kleine aangroeiing β van x , berekent $d(uv)$ en $dudv$ en vindt dat ze verschillend zijn. Enige dagen later blijkt dat hij de correcte regel gevonden heeft.

De manuscripten

Ter illustratie zijn in Figuur ?? twee passages uit Leibniz' manuscripten opgenomen. Het betreft de teksten waarvan de vertaling bij Child op pp. 80-81 staat. De leesbaarheid van het manuscript gaat bij reproductie een beetje achteruit, maar erg veel duidelijker is het origineel niet. De transcriptie is ook afgebeeld, deze is genomen uit Leibniz' *Briefwechsel* pp. 153-155 (zie de literatuurlijst).

Slot

Tot zover de manuscripten uit October-November 1675. Het duurde nog twee jaar totdat Leibniz de definitieve vorm van zijn differentiaalrekening ontwikkeld had. Hij publiceerde erover in 1684 en 1686, en in het begin van de 1690- er jaren namen een aantal wiskundigen (de Bernoulli's, l'Hôpital) zijn methode over. Daarmee begon de succesvolle ontwikkeling van de differentiaal- en integraalrekening, waarin de symbolen d en $\int$ en veel van de ideeën die Leibniz daar vanaf het begin mee verbond van groot belang zijn gebleven.

Literatuur

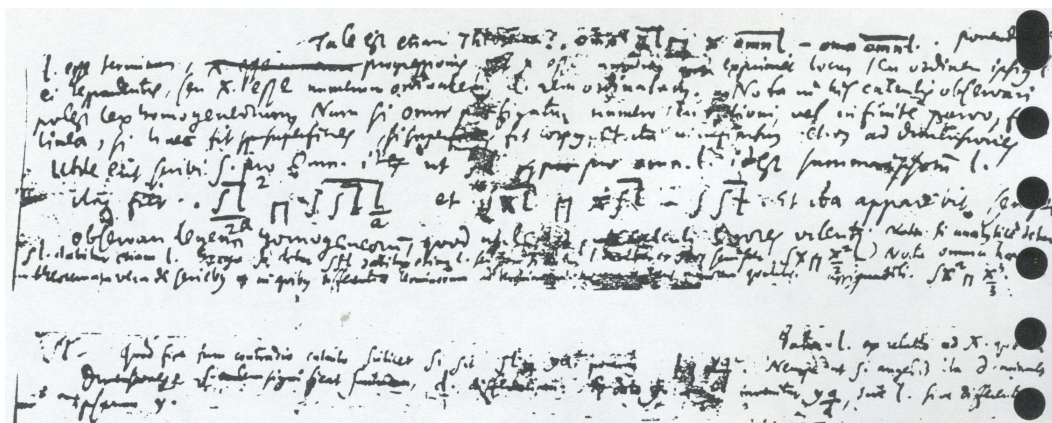
Baron, M.E. & Bos, H.J.M., *Origins and development of the calculus*, Milton Keynes, 1976, Unit 3, *Newton and Leibniz*.

Child, J.M., *The early mathematical manuscripts of Leibniz*, London 1920.

Edwards, C.H., *The historical development of the calculus*, New York etc. 1979.

Grattan-Guinness, I. (ed), *From the calculus to set-theory 1630- 1910, an introductory history*, London 1980.

Leibniz, G.W., *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern* (ed. C.I. Gerhardt), Berlin, 1899.



Figuur 6. Twee passages uit Leibniz' manuscripten, met transcriptie

4 Thema's uit mijn onderzoek

Inleiding

Dit diktaatgedeelte bevat de tekst van een “preprint” van een artikel van mij dat binnenkort gepubliceerd zal worden. Tijdens de colleges op 2 en 9 December zal ik wat vertellen over zaken die in mijn onderzoek een belangrijke rol spelen. De preprint gebruik ik daarbij als illustratie.

De tekst is de bewerking van een lezing die ik in April 1992 te Parijs gehouden heb tijdens een conferentie over “Mythes et réalités de l’Europe mathématique”. Het stuk is aanvaard voor publikatie in de *Proceedings* van die conferentie, die (hopelijk) in 1995 zullen verschijnen. Zoals dat vaak gebeurt, heb ik een ‘preprint’ versie van de tekst laten maken om die aan collega’s en belangstellenden te sturen, zodat het stuk sneller (maar informeel) bekend wordt.

Tradition and modernity in early modern mathematics — Viète, Descartes and Fermat

Henk J.M. Bos

Introduction

At present, mentioning modernity makes us look back rather than forward. This retrospection often comes to focus on the early modern period.⁷ There, to blame, to praise or to wonder, we seek the originators of the visions which now seem to lose their self-evidence while leaving their ambivalent imprint on our mental and natural environment.

If we follow that example for mathematics and focus in particular on the early seventeenth century we meet three key figures: Viète, Descartes and Fermat. Viète and Descartes invite our interest not only by their technical contributions to mathematics but also by the visionary and programmatic character of their work. This quality suggests that we may study their contributions and ask in how far, in myth or reality, they steered the course of mathematics towards ‘modernity’. I shall use this question as a welcome pretext and a useful guideline for analysing and comparing the visions, the programmes and the influence of the two mathematicians. I shall also involve Fermat in the comparison. Fermat was a virtuoso rather than a visionary mathematician, but he was influential and in a sense his contributions complemented the programmes of Viète and Descartes.

Viète formulated his programme for mathematics in print in 1591 and published a series of treatises about it in the next decade. Descartes published his programmatic treatise on geometry in 1637. Despite a time difference of almost half a century and strong differences both in the style and in the later fate of their theories, it will appear that their programmes for mathematics were strikingly similar.

The classical heritage

One reason for the similarity of Viète’s and Descartes’ programmes was that both were shaped in reaction to a particular section of classical Greek mathematics, primarily represented by the works of Diophantus and Pappus. Early modern mathematicians felt that from these works in particular the first principles of an ancient analytical method could be recovered, which, it was believed, had been only partially conserved in the extant Greek mathematical works. The analytical character of that method was seen to reside in a particular way of reasoning in which one started by assuming that the problem was already solved. This enabled the mathematician to argue about the required solution of the problem (a number for instance, or a point in a figure) as if it was already found, to give it a name, to perform operations on it and in general to find avenues of argument leading back and forth between the given and the required elements of a problem situation. The arithmetical books of Diophantus, available in print since 1575,⁸ gave classical standing to algebra as an analytical tool and inspired an interest in extending its use for

⁷Cf. for instance Toulmin, Stephen, *Cosmopolis: the hidden agenda of modernity*, New York (Free Press) 1990.

⁸Diophantus, *Rerum arithmeticarum libri sex*, Basel, 1575.

problem solving beyond the common number problems to which algebra had been mostly devoted before. Pappus' *Collectio*, available in print since 1588,⁹ contained examples of analytical solutions of geometrical problems; Pappus also devoted a long section to a review of a number of classical treatises (several of which have not been preserved) devoted to analysis.

Viète and Descartes drew their inspiration mainly from these sources; they were less interested in other themes from the classical heritage such as the axiomatic deductive structure of geometrical theory (as exemplified Euclid's *Elements*), problems of quadratures and tangents (as in Archimedes' works) or conic sections (as treated by Apollonius).

The early modern tradition of geometrical problem solving

The analytic method was seen as first and foremost a means to solve problems — much less as a help in proving theorems.¹⁰ These problems might concern numbers or geometrical figures. Viète was interested in both types of problem, Descartes concentrated on the latter. For that reason I shall, in comparing their ideas, primarily be concerned with geometrical problems. We may, in fact, speak of an early modern tradition of geometrical problem solving and it will be useful to briefly sketch the subject matter of this enterprise. To do so I can use a twofold classification of geometrical problems. The first classification was an ancient one which the early modern period learned from Pappus; it divided problems into 'plane', 'solid' and 'line-like'¹¹ ones. Plane problems were those that could be constructed by straight lines and circles (ruler and compass)¹². Solid problems were those non-plane ones which could be constructed by means of conic sections. In such constructions it was assumed that conic sections (parabolas, hyperbolas, ellipses) with prescribed vertices, axes and shape could be drawn and that their points of intersection were thereby determined. Finally line-like problems were those for whose construction more complicated curves than straight lines, circles or conic sections were necessary. The second classification is according to types. This classification is mine, but it follows a division of problems which is implicit in many of the early modern sources before Descartes and Fermat.

In Table 1 I give a number of characteristic examples of problems from the tradition ordered according to the two classifications; in Table 2 I briefly explain the nature of the various types of problem. The information in the tables should illustrate the extent of the field. I should remark that several of the types, for instance the triangle problems and the division problems, contained definitely non trivial items. I have not incorporated locus problems in the survey because they did not appear on the early modern scene before Fermat and Descartes dealt with them in the 1630's.

⁹Pappus, *Mathematicae collectiones* (tr. ed. F. Commandino), Pesaro, 1588.

¹⁰Wilbur R. Knorr has shown that also in classical Greek mathematics analysis was hardly ever seriously used for finding proofs of theorems; see his *The ancient tradition of geometric problems*, Boston, Birkhäuser, 1986, pp. 358-360.

¹¹The Greek term for the last category is often translated by 'linear'; I prefer 'line-like' because the modern term 'linear' suggests straight lines and first-degree equations, and is therefore inappropriate for Pappus' third category which involves higher-order algebraic and transcendental curves.

¹²I shall use both expressions, although 'by straight lines and circles' is more appropriate because Euclid did not refer to instruments in the postulates which codified these constructions.

Examples of problems
from the early modern tradition of problem solving
(see Table 2 for an explanation)

Problems:	'Plane'	'Solid'	'Line-like'
Standard			
Mean proportionals			
Angular sections			
Area/content			
Neusis			
Division			
Triangle			
Varia			

Table 1. Examples of problems from the early modern tradition of problem solving; for explanation see Table 2 below.

Pappus' Classification:

'Plane' problems: Problems constructible by straight lines and circles ('ruler and compass').

'Solid' problems: Non-plane problems constructible by means of conic sections.

'Line-like' problems: Problems for whose construction more complicated curves than straight lines, circles or conic sections are necessary.

A classification into types:

Standard problems: Problems whose construction regularly occurred as part of more complicated constructions. Example: to erect a perpendicular to a line.

Mean proportionals: Mean proportionals of two line segments a and b are line segments which occur as elements of a geometrical sequence with a and b as first and last term respectively. The simplest case is the so called 'geometrical mean' x such that $a : x = x : b$; to construct the geometric mean is a plane problem. The construction of two mean proportionals x and y , satisfying $a : x = x : y = y : b$, is a solid problem. The construction of n mean proportionals for indeterminate n is line-like; it can be solved by means of a logarithmic curve.

Angular sections: To divide a given angle in two parts with a given ratio α . For $\alpha = 1 : 1$ the problem is plane (bisection), for $\alpha = 1 : 2$ (trisection), the problem is solid. For indeterminate α the problem is line-like; it can be solved by means of the Archimedean spiral or the quadratrix.

Area/content problems: Given two similar figures A and B in the plane, it is required to find a similar figure C whose area is equal to the sum of the areas of A and B . Analogously: Given two similar solids U and V , it is required to find a similar solid W whose content is equal to the sum of the contents of U and V . Area problems are plane, content problems are solid.

Neusis problems: Given two straight or curves lines l and m , a point P and a length δ , it is required to draw a straight line through P such that the intercept on it between l and m is equal to δ . In general the problem is solid. There are special cases in which the problem is plane, for instance when l is a circle, m a straight line and P is the intersection of the circle with the diameter perpendicular to m .

Division problems: Given a figure F in the plane and a point P , it is required to draw a line through P dividing F in two parts whose areas have a given ratio. For polygons F this problem is plane. Similarly: to divide a solid S by a plane in two parts with given ratio. If S is a sphere, this problem is solid.

Triangle problems: To construct a triangle from three independent data involving its sides and angles. For instance: Given the base a , the height h and the ratio of the two sides b and c , to construct the triangle; this problem is plane.

Varia: For instance: Given a parabola and a point P ; it is required to draw a line through P perpendicular to the parabola. If P is not on the parabola, this problem is solid.

Table 2. The early modern tradition of problem solving — classifications and examples of problems (cf. Table 1)

The programmatic challenge

Viète expounded his programme for problem solving in mathematics in his *In artem analyticen isagoge*¹³ of 1591; in that work he announced a series of treatises which were to contain the elaboration of the programme. A number of these treatises did appear but the work was incomplete by the time of Viète's death in 1603. Descartes' programme for mathematical problem solving was stated and elaborated in a single publication, the *Géométrie*¹⁴ of 1637. Viète ended his *Isagoge* with a proclamation whose central slogan, often quoted in early modern arguments on problem solving, was:

(-) the analytic art (-) appropriates to itself by right the proud problem of problems, which is: TO LEAVE NO PROBLEM UNSOLVED.¹⁵

Descartes, no doubt fully aware of this phrase, opened his *Géométrie* as follows:

All the problems of geometry can easily be reduced to such terms that thereafter all one needs for their construction is to know the lengths of certain straight lines.¹⁶

“Nullum non problema solvere,” “Tous les problemes de geometrie” — these expressions make clear that both Viète and Descartes considered problems to be somehow surveyable, so that it made sense to speak of ‘all problems.’ Accordingly they saw the challenge of problem solving as: to create an analytic method covering this whole field. Viète, inspired by Diophantus, concluded that to be really powerful, the analytic method should use symbolic algebra. Descartes later readily subscribed to this idea, which had by then become generally acknowledged.

Elements of the programme

With the task to create an analytical method, involving algebra but applying to a range of problems that included geometrical ones, Viète and Descartes had to address several issues (cf. Table 3).

¹³Viète, François, *In artem analyticen isagoge*, Tours, 1591. The work was reprinted in Viète's *Opera mathematica* (ed. F van Schooten), Leiden, 1646 (facs. reprint Hildesheim 1970), pp. 1-12. An english translation by J. Winfree Smith, made in 1955, is published as an appendix (pp. 315-353) of Klein, Jacob, *Greek mathematical thought and the origin of algebra* (tr. Eva Brann), Cambridge Mass. (M.I.T. Press), 1968. Another english translation is in Viète, François, *The analytic art, nine studies in algebra, geometry and trigonometry* (tr. T.R. Witmer), Kent (Ohio), 1983, pp. 11-32.

¹⁴Descartes, René, *La géométrie*, one of the ‘essays’ (pp. 297-413) in *Discours de la methode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences; plus la dioptrique les meteores et la geometrie qui sont des essais de cete methode*, Leiden, 1637 (facsimile editions: Osnabrück (Editio simile), 1973; Lecce, 1987); the text is in vol. 6, pp. 367-485 of the *Oeuvres de Descartes* (13 vols, ed. Ch. Adam and P. Tannery, Paris (Cerf), 1897 - 1913) (“nouvelle présentation,” Paris (Vrin) 1964-1974). There is a facsimile edition of the original text with english translation: *The geometry of René Descartes* (tr. ed. D.E. Smith and M.L. Latham), New York (Dover), 1954.

¹⁵“ (-) NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE”, as translated by J.W. Smith, see Klein, *Greek mathematical thought* (cf. note 13) p. 353.

¹⁶“Tous les Problemes de Geometrie (-) ” *Géométrie* (cf. note 14) p. 297.

- A:** Dissociate algebra from numbers; make it general
- B:** Elaborate a canon for problem solving:
 - B1:** Translate the problem into algebra
 - B2:** Use algebra.
 - B3:** Translate the algebraical result (equation, solution) back and solve the problem
 - B4:** Prove that the solution is correct.

Table 3. Elements of the algebraic analytical programme

Before comparing Viète's and Descartes' methods and programmes some general remarks have to be made about these issues. The first, A in the table, was to dissociate algebra from numbers. By the end of the sixteenth century algebra was seen and practiced chiefly as a method for problems about numbers. Number was primarily understood as natural or rational number. There was no well defined concept of real number, nor was there an easy conviction that some number concept would cover both rational and irrational magnitudes and ratios. This meant that an exclusive connection with number would make algebra unfit for general problem solving and hence a dissociation of algebra from its primarily numerical context was necessary.

The second issue, B in the table, was to control the back and forth between a problem (which might be numerical or geometrical or general) and its algebraic counterpart used in the analysis. This required a canon for problem solving by means of algebra and such a canon would have to contain four distinct parts, namely, B1: to translate the problem into algebra, B2: to apply algebraic techniques, B3: to retranslate the results of the algebraic manipulations back into the context of the original problem and thus reach a solution, and B4: to prove that the result was correct.

Part B1, to translate the problem into algebra, presented no fundamental difficulties. The result of the translation was an equation or a system of equations. In the case of geometrical construction problems the result could be further reduced to one equation in one unknown. In the case of locus problems the result was one equation in two unknowns. This case, however, did not occur before Descartes and Fermat entered the field; in fact until then the early modern tradition of problem solving had not considered locus problems.

Part B2 — use algebra — was less straightforward. Obviously one would try to solve the equation arrived at in B1. However, few equations can be algebraically solved in any straightforward sense. Equations in two unknowns cannot be 'solved'; they can only be rewritten in various forms that may or may not be helpful. Equations in one unknown, say x , define the unknown x implicitly. The possibilities to extract an explicit algebraic expression for x from the equation are restricted. If the degree of the equation is 1 or 2, such an explicit algebraic solution is fairly simple; it involves square root extraction and was known, in various equivalent forms, since Babylonian times. If the degrees are 3 or 4 it is still possible to give an explicit expression for x ; this possibility was realized by sixteenth-century mathematicians. The relevant expressions involve both cubic and square roots and are rather cumbersome. Moreover, the interpretation of these expressions

essentially implies ‘imaginary’ quantities (modern: complex numbers) which throughout the early modern period remained enigmatic. For equations of higher degree there is no general formula. Thus the use of algebra usually did not provide an effective explicit algebraic solution of the equation. This was less a disadvantage than it may seem because the aim of the algebraic formulation was not primarily the explicit algebraic expression of the unknown but a transformation of the equation in a form that could be usefully translated back into the context of the original problem and lead to its solution.

The usefulness of an equation for arriving at a solution, part B3, strongly depended on the original context. If the problem, for instance, was about numbers, the final equation should be translated into a calculation of the required number or numbers. If it was a geometrical problem, the equation should be translated into a procedure for solving the problem, that is, into a geometrical construction.

The proof that the calculation or the construction was correct, part B4, was not considered part of the analytical method, nor was it considered particularly difficult or interesting, because a proof could usually be straightforwardly inferred from the information gained in the analysis. I shall therefore leave the proofs out of my further consideration.

Viète

Having analysed the programmatic challenges that confronted both Viète and Descartes, I now turn to their respective responses to the issues specified as A, B1, B2, B3 above. I begin with Viète.

Dissociating algebra from numbers can be done in two ways. One is to assume another subject matter than numbers, for instance geometrical line segments. This was, as we will see below, the approach chosen by Descartes. Viète adopted a different, much more abstract approach. He refrained from explicitly identifying the magnitudes to which algebra was to be applied; he only stated the laws they were subjected to. The result of this approach, as explained in Viète’s *Isagoge*, may be characterized as an abstract algebra with a homogeneity law — abstract in the sense that the system was implicitly defined by a set of rules and laws. Viète called the system ‘logistica speciosa’.¹⁷ It featured the common algebraic operations $+$, $-$, $\times$ and $\div$, scalar multiplication (i.e. multiplication by a (rational) number) and root-extraction. Neither the operations, nor the magnitudes were further defined. Of the magnitudes it was stipulated only that they were denoted by letters and that each had a well defined dimension, which could be any positive integer, not excluding those above three. In his use of letters Viète reserved vowels for unknown quantities and consonants for the indeterminate ones. A ‘law of homogeneity’ regulated the behaviour of the operations with respect to the dimensions: only terms of the same dimension could be added, multiplication of two factors of dimension m and n gave a product of dimension $m + n$, k^{th} root extraction was possible only if the dimension was a multiple of k , etc.¹⁸ Viète’s system of notation for the operations, the dimensions and

¹⁷‘Logistica’ in the sense of calculation. Historians disagree on the origin and meaning of Viète’s term ‘speciosa’, see Viète, *Analytic art* (cf. note 13) p. 13, note 8, but it seems clear that the term was meant to stress the generality of the procedure and its independence from numbers. I shall translate ‘specious logistics’.

¹⁸Actually, Viète did not indicate the dimensions by numbers but by geometrical terminology general-

the powers relied in part on words and abbreviations rather than signs (he used “in” for multiplication, for instance, and his system for indicating dimensions and powers was based on abbreviations), but it was consistent and easy to use.

This specious logistics was Viète’s answer to the programmatic challenge of dissociating algebra from numbers. It has not fared well in the opinion of posterity; his system is often considered to be cumbersome as to notation and uselessly complicated by the requirement of homogeneity. That assessment is incorrect, if not unfair. Viète’s system is not very cumbersome and it is most impressive in its daring abstractness and integrity. Viète created a system of symbolic algebra based solely on the operations and on homogeneity, deliberately renouncing further commitments as to the ontology of the elements, which enabled him to move beyond the frontier 3 for the dimensions. This is a remarkably modern approach, much akin to the axiomatic methods by which present-day mathematicians routinely introduce structures that admit many different models. Indeed the structure of Viète’s specious logistics can readily be translated in modern terms.¹⁹ Moreover, dimension and the multiplicative composition of quantities were ubiquitous features in early modern arithmetic, number theory and geometry; it was therefore eminently reasonable to incorporate it in a system that was created to encompass all these different mathematical theories. It is true that later the unique structure of the real numbers was found to be versatile enough to cover the applications of algebra which Viète envisaged, but that use of numbers had its discomforts as well, for instance the implicit assumption of a system of units with respect to which the geometrical (and physical!) magnitudes could be measured (Viète’s system needed no units). Moreover, the nature of the real numbers was satisfactorily established only in the nineteenth century.

I now turn to Viète’s canon of problem solving by means of the specious logistics. Viète made a tripartite division in his canon of problem solving, corresponding to the items B1-B3 distinguished above; he saw the three parts as separate subdisciplines of analysis and he considered their distinction as a crucial new contribution to the discipline. The techniques for translating problems into algebra (item B1) he called ‘zetetics.’ The use of specious logistics (item B2) to transform the equations gained by zetetics he called ‘poristics,’ and the retranslation of the algebraical result into a solution of the original problem (item B3) he called ‘exegetics’ or ‘rhetics.’

Poristics was the general part of the canon in which the origin of the problem (geometrical, arithmetical or otherwise) played no role. It involved the general theory of equations, the transformations of equations to standard form, and, if possible, the explicit expression of the unknown in terms of the indeterminate coefficients.

Exegetics, or rhetics, concerned the retranslation of the result gained by poristics into the context of the original problem. This implied that there was no one general, ‘specious,’ exegetics, but several, in particular a numerical exegetics and a geometrical exegetics. The difference may be illustrated by the case in which the poristics resulted in an expression for the unknown involving square or cubic roots. If the original problem

izing the geometrical dimensions length, plane, solid. Thus the fourth dimension was called ‘plano-plane’ etc. However, he was quite aware that the dimensions could be numbered by positive integers and that the operations changed the dimensions according to rules above.

¹⁹One might describe Viète’s system as a graded ring in which the modules are semigroups in stead of groups and from which only the homogeneous elements are considered.

was numerical this meant that the solution was to be calculated by root extraction. This calculation would supply an exact solution only if the number from which the root had to be extracted was a square (or a third power in the case of the cubic root); if not, the problem could only be solved by calculating an approximate value. If, on the other hand, the original problem was geometrical, the results of poristics had to be translated in a geometrical solution, that is a construction. In the case of square roots such a construction was possible by ruler and compass and was not considered an approximation but an exact solution. If cubic roots occurred no construction with ruler and compass was possible and other means of construction had to be applied. Viète prescribed to use construction by so-called ‘neusis’ in that case; he did not consider that method — which I shall not explain here — an approximate device but an legitimate exact construction in geometry. The various procedures for dealing with roots well illustrate how fundamentally the two kinds of exegetics differed and also how unavoidable these differences were.

The summary may give the impression that Viète mostly busied himself with the abstract and methodological sides of mathematics. That impression is mistaken; within the framework of his programme he provided much solid and in part new algebraic technique. Also with respect to the relation of algebra to geometry he achieved strong results. Thus his geometrical exegetics, elaborated in the treatises *Effectionum geometricarum canonica recensio*²⁰ and *Supplementum geometriae*²¹ of 1593, culminated in the proof that all geometrical problems which can be reduced (by zetetics and poristics) to fourth- or lower-degree equations can be constructed by ruler or compass or can be reduced to two special problems not so constructible, namely either the trisection of an angle or the determination of two mean proportionals between two line segments. He combined this new result with a classical one, namely that these two problems themselves may be reduced to a single problem called the ‘neusis problem.’ The combined result was new and truly significant because at one stroke it structured almost the whole field of geometrical problem solving.

Descartes

Contrary to Viète, Descartes devoted only one publication to mathematics, his *Géométrie* of 1637. In it he expounded his programme for geometry as well as the results he had gained in working it out. In Descartes’ programme, like in Viète’s, algebra was the principal tool for mathematical problem solving. Thus Descartes was confronted with the same questions as Viète: to dissociate algebra from numbers and to design a canon for problem solving guiding the back and forth between problem and equation.

As to the first question (item A) Descartes’ answer was short and effective. In the first pages of the *Géométrie* he proposed a new interpretation of the algebraic operations such that they applied to geometrical line segments but were not hampered by requirements of homogeneity. Thus, rather than adopting the Viètean abstract symbolic approach,

²⁰Viète, François, *Effectionum geometricarum canonica recensio*, Tours, 1593; in *Opera* (cf. note 13), pp. 229-239; translation: *A canonical survey of geometric constructions* in *Analytic art* (cf. note 13), pp. 371-387.

²¹Viète, François, *Supplementum geometriae*, Tours, 1593; in *Opera* (cf. note 13), pp. 240-257; english translation *A supplement to geometry* in *Analytic art* (cf. note 13), pp. 388-417.

Descartes chose for an explicit identification of the magnitudes, namely as line segments. Consequently the algebraic operations had to be interpreted as geometrical constructions. Addition and subtraction were obvious; Descartes defined multiplication and division of line segments in such a way that the result was again a line segment (rather than a rectangle as was the classical interpretation and as Viète's system also implied). To do so he presupposed the choice of one particular line segment as unit; that was enough to avoid the dimensional interpretation and the requirement of homogeneity. The move was daring but not subtle. For instance, in large parts of the *Géométrie* Descartes actually proceeded without the assumption of such a unit length, working consistently with homogeneous equations. Yet he nowhere discussed the (non trivial) question whether this classical use of algebra was compatible with his own non-homogeneous interpretation as given in the opening pages of his book.

After explaining the algebraic operations Descartes equally briefly and straightforwardly explained how geometrical problems were to be translated into algebraical equations (item B1). He gave more attention to items B2 and B3: using algebra and retranslating the algebraic results into geometry. As to these procedures there is a considerable difference between locus problems and determinate construction problems and therefore I shall discuss these separately, beginning with locus problems. Descartes used one problem, the so-called 'problem of Pappus,'²² to show how to deal with locus problems and the corresponding equations in two unknowns. He devoted most attention to the case of quadratic equations, showing, by rewriting the equation in a standard form, that the corresponding loci were conic sections, and explaining how the defining parameters of the conic section and its location in the plane could be determined from this equation. For the actual construction of the locus he could then refer to Apollonius' work on conics, which contained constructions of conics with given values of the parameters. This approach, however, could not be adapted to loci whose equations were of higher degree than two. For this more general case Descartes sketched a method which led to a construction of points on the locus. He explained that, given the equation, a point on the locus with given abscissa x_0 could be constructed by constructing the roots of the corresponding equation (in the single unknown y). By repetition of this procedure arbitrarily many points on the curve could be constructed.

Thus the general construction of loci was reduced to the construction of roots of equations in one unknown. Also the analysis of determinate construction problems led to such equations. Understandably, then, the central and crucial question in Descartes' *Géométrie* was the geometrical construction of roots of equations in one unknown. Descartes gave methods to reduce these equations to various standard forms. To do so he developed an impressive array of algebraical techniques and insights (his famous sign rule, for instance, was necessary in connection with the standard form for fifth- and sixth-degree equations). The standard forms of the equations differed as to the degrees and were directly linked to the standard constructions Descartes proposed for the separate classes of equations. Here Descartes had to break new ground, because no standard methods had been developed for the construction of roots of equations of degree higher than four. In fact, Descartes

²²What is usually referred to as 'Pappus' problem' is actually a whole class of locus problems; depending on the complexity of the data of each separate problem, the corresponding equation of the locus may be of any degree.

did not proceed further than the sixth degree but he claimed — over-optimistically but in principle not incorrectly — that his approach could be generalized to higher degrees. The standard constructions Descartes gave employed curves as means of construction: for degrees 1-2 circles and straight lines, for degrees 3-4 straight lines, circles and a parabola, and for degrees 5-6 straight lines, circles and a class of curves (later) called ‘Cartesian parabolas’. In connection with the use of these curves he developed a doctrine about which curves were acceptable in geometry and which were not. He based this doctrine primarily on the manner in which the curves were traced but his final criterion was algebraic: curves were acceptable in geometry if they admitted an algebraic equation, otherwise they were ‘mechanical’, and could not be known with sufficient clarity and distinctness to be allowed in geometry. The doctrine had a great influence during the later seventeenth century.

Comparison

These brief sketches of Viète’s and Descartes’ doctrines of analytic problem solving should show the strong similarity of the two programmes, especially in their structure. But there were also differences. Viète’s primary concerns were the formal consistency of his use of algebra, as evidenced in his abstract specious logistics with its careful incorporation of dimensionality, and the clear conceptual distinction of the different parts of the analytical procedure of problem solving, codified in the separation of zetetics, poristics and exegetics-rhetics. Descartes was less concerned with these points of abstraction and distinction. He considered geometrical magnitude, as objectified in line segments, to be representative of magnitude in general and thus he saw the application of his method to geometry as sufficient proof of its general applicability. However, more than Viète, Descartes was concerned with the power of the new method, in other words, with the claim to solve *all* problems. Where Viète had given the geometrical exegetics only for determinate problems whose translation into algebra led to equations in one unknown of degree at most four, Descartes felt challenged to explain the solution, that is, the geometrical construction, of both locus problems and determinate problems leading to equations of any degree. This concern for complete coverage led him to devote much more attention to the canon of geometrical problem solving. He especially took seriously, much more so than Viète, the conceptual problems involved in higher-order construction where neusis or the use of conic sections was no longer enough. This led him to a much deeper interpretation of the meaning of exactness of geometrical procedures such as curve tracing and construction, and to his demarcation between geometrical and mechanical curves.

Indeed the most important difference between Viète’s and Descartes’ approaches to problem solving by analysis concerned the role of curves. It appears that Viète was little interested in curves and locus problems. Descartes, on the contrary, was strongly interested in curves, both as loci and as the means for constructing problems in geometry. This brings me to a special topic which has to be elucidated here, namely locus problems and their role in classical analysis.

Loci and analysis by ‘givens’

The most informative report available to early modern mathematicians about classical Greek analysis was in Pappus’ *Collectio*, in particular in his review of several classical treatises devoted to analysis. From this source, and from some other classical texts, it was clear that loci were considered an important ingredient of the analytical method — Pappus mentioned several treatises on loci. It also appeared, for instance from the fact that Euclid’s treatise called *Data* figured among those mentioned by Pappus, that the concept of ‘given’ played a central role in the analytical procedure. However, in Viète’s algebraic reformulation of analysis loci and the concept of ‘given’ were practically absent, nor did Descartes devote much attention to the latter concept, while he treated loci primarily as problems to be solved by analysis rather than as part of the method of analysis.

It will be useful for our comparison of Viète’s and Descartes’ achievements to devote some attention to these aspects of classical analysis which they neglected in their reconstruction, and this will provide the occasion to briefly describe Fermat’s role in the early modern reconstructions of analytical methods.

The rules for analysis by means of the concept of ‘given’ were codified in Euclid’s *Data*; several more explicit examples of the method could be found in Pappus and Archimedes. The method was primarily meant for solving geometrical problems and it proceeded by analyzing configurations by statements which declared certain parts of that configuration ‘given’. The assertion ‘the point P is given’, or ‘the figure F is given’, meant that P or F could be constructed from previously given elements of a figure. Thus the concept of ‘given’ was a relative one, it always depended on what was, by supposition or previous argument, already given before. Points, line segments, triangles, etc. could be ‘given’ in several ways. They were given ‘in position’ if they could be constructed in their position in the plane; they were given ‘in magnitude’ if an element of the same magnitude but not necessarily with the same location in the plane could be constructed; they were given ‘in shape’ if a similar configuration could be constructed whose magnitude and location in the plane, however, remained undetermined.

Classical analysis proceeded by successive assertions whose general form can be symbolically represented by:

1. If $\Omega(F)$, then F is *given* in magnitude / in position / in shape.
2. If $\Omega(P)$, then P is on a straight line / circle / conic given in position.

Here F is a figure, P is a point and $\Omega(\cdot)$ stands for a statement about P or F in relation to previously given parts of a figure. Taking over the terminology from the title of Euclid’s *Data*, I shall refer to such assertions as ‘givens’. The following are examples:

- 1’. (Euclid, *Data* 32) “If between parallel straight lines given in position there is drawn a straight line making given angles, the line so drawn is given in magnitude”.²³
- 2’. (Pappus, *Collectio*, from IV, Prop. 34) If P and Q are points given

²³I quote Ito’s English text: Euclid, *The medieval Latin translation of the Data of Euclid* (ed. tr. Shuntaro Ito), Tokyo, University of Tokyo Press, 1980, pp. 104-105.

Problem: In a given configuration a point P is to be constructed satisfying certain given properties.

C1: By analysis, arguing from the given configuration, find that P is on two given plane or solid loci;

C2: Construct ('synthesize') the loci, their intersection(s) give the required point P .

Table 1: The canon of problem solving employing analysis by 'givens' and the synthesis of loci

in position and R is a point such that $\angle RPQ = 2\angle RQP$, then R is on a hyperbola given in position.²⁴

Statements of the second kind were of special importance for construction, because if the analysis of a problem provided two different such statements about a point P , then P could be constructed. If P was found to be on a straight line l given in position and also on a circle C given in position, then clearly P could be constructed by intersecting l with C , that is by ruler and compass. Again if it was found that P was on two conics C_1 and C_2 , each given in position, then P could be constructed by the intersection of the two conics. At this point appears the connection of this method of analysis with loci: statements of the second kind in fact define loci. Statement **2** above implies that the property indicated by Ω defines a *locus*, a one-dimensional collection of points, and that that locus is a line or a circle or a conic given in position. Thus **2** asserts that the locus can be given, that is, constructed from the defining property Ω . The theory about how to construct loci from their defining properties was called the 'synthesis of the loci'. If the loci were straight lines or circles (these were called 'plane loci') the composition was straightforward. The case of conics (called 'solid loci') was more complicated. It appears that early modern mathematicians accepted a conic as 'given in position' if its axis and vertex were given in position and the parameters that further define the shape of the conic (namely the *latus rectum*, the *latus transversum* and the ordinate angle) were given in magnitude. The problem of the synthesis of solid loci, then, was: Given a property which defines a solid locus, to determine the position of its axis and vertex and the magnitudes of its *latus rectum* and *transversum* and of the ordinate angle.

Thus the analysis by 'givens' together with a method of synthesizing loci, constituted a classical twofold (analysis — synthesis) canon for solving determinate geometrical problems (see Table 4).

It should be noted that analysis by 'givens' differed from the Diophantus-inspired type of analysis in that it did not argue from the unknown to the known, but from the known to the unknown. The corresponding synthesis, in this case, followed the same direction as the analysis. One may best characterize this analysis as a shorthand strategy for planning synthetic constructions.

²⁴) Pappus Alexandrinus, *Collectionis quae supersunt* (ed. F. Hultsch), 3 vols, Berlin, Weidman, 1876-1878, (reprint Amsterdam (Hakkert) 1965), vol 1, pp. 280-283. In the proposition Pappus uses this 'given' to trisect an angle by intersection of the hyperbola and a circle.

Comparison continued, enter Fermat

Both Viète and Descartes introduced an algebraic method of problem solving. Neither, however, algebraized the classical method via analysis of ‘givens’ and synthesis of loci as explained above. This, in fact, was done by Fermat. It is instructive to use this difference in attitudes towards one particular type of analytical method for a further comparison of the contributions of Viète, Descartes and, now also, Fermat.

Viète expressed no interest in construction by the intersection of curves beyond straight lines and circles; he adopted a postulational approach to solving non-plane problems, reducing all ‘solid’ problems to the neusis problem, whose construction he postulated to be possible. Accordingly, he was not much interested in curves or loci. This explains why, although with the apparatus developed in his specious logistics he would have been able to represent curves by equations, he did not do so (and thereby left it to Fermat and Descartes to introduce, some 40 years later, this central concept of analytic geometry).

Descartes did adopt construction by the intersection of curves and he did analyze locus problems by means of equations in two unknowns. However, in his canon of problem solving he did not incorporate construction by the intersection of loci. The algebraic translation of steps C1-C2 in the classical analysis by loci would have been to reduce the problem to two equations in two unknowns and then constructing it by the intersection of the loci thus obtained. Rather than taking this more classical approach, Descartes prescribed to reduce a problem to an equation in one unknown and construct the roots of that equation by the standard constructions mentioned above, which involved standard curves: a (single) parabola for equations of third and fourth degree, a Cartesian parabola for those of degree 5-6, and (Descartes suggested) etcetera. The choice is understandable from Descartes’ wish to provide a full canon of construction: it is not clear how the classical analysis by loci, even if algebraized, should proceed in the case of problems that required more complicated curves than conics for their construction.

At this point the role of Fermat can be characterized: in his treatises *Ad locos planos et solidos Isagoge*, and *Appendix ad isagogen topicam continens solutionem problematum solidorum per locos*, written c. 1636,²⁵ he showed that Viète’s specious logistics could also be used as analytical method for studying loci and solving problems (especially solid problems) by the intersection of loci. Thus Fermat took the last step in algebraizing classical analysis, a step which Viète had not taken because of his choice for the neusis postulate and which Descartes did not take because he saw no natural generalization of this method beyond solid problems.

It is generally agreed that although Descartes’ *Géométrie* was more influential in spreading the techniques of analytic geometry, it was Fermat who gave the clearest and most direct formulation of the central principle of analytic geometry, the equivalence of the equation (in two unknowns) and the curve.²⁶ He did so, as we have seen, in the

²⁵ Fermat, Pierre de, mss *Ad locos planos et solidos isagoge* and *Appendix ad isagogen topicam, continens solutionem problematum solidorum per locos*, probably written in 1636 but published in print only in 1679 in his *Varia opera mathematica*, Toulouse, 1679, pp. 1-8 and 9-11. In the *Oeuvres de Fermat* (ed. P. Tannery and Ch. Henry, 4+1 vols, Paris (Gauthiers-Villars), 1891-1912(-1922)), the treatises are in vol 1, pp 91-103 (*Isagoge*), and pp. 103-111 (*Appendix*).

²⁶ Cf. for instance Boyer, Carl B., *A history of mathematics*, New York, Wiley, 1968, p. 377, 380, and Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, Oxford University Press,

context of a belated algebraization of a segment of classical geometrical practice, locus problems and analysis by ‘givens’. Yet I like to speculate that it was precisely this context which produced the clearer formulation — if not a clearer insight — in the equivalence of curve and equation. For Descartes a locus constituted a problem, its equation was the translation of the problem, the curve was the solution, to be reached by a construction. In this situation the equation and the curve were inequivalent; the one was a problem and the other a solution. However, in the context of restoring ancient analysis a locus was a means of analysis, its equation was the algebraic translation of that means, and the curve, again, was a means, namely of construction. Thus the context of Fermat’s reconstruction of analysis carried a more immediate suggestion of the equivalence of curve and equation than the one in which Descartes worked out his algebraic method of analysis.

Conclusion

Let me now return to the question mentioned at the beginning of this lecture, namely in how far, in myth or reality, Viète and Descartes did steer mathematics upon a course of ‘modernity’ in its journey from antiquity to the present — and let me include Fermat in this consideration as well.

In myth they did, if myth is taken as value-bestowing belief (which does not necessarily imply that it is in conflict with reality). But there, of course, the measure assigned to their influence on the course of mathematics depends on the values underscored by the myth. The now commonly accepted view bestows the highest value on Descartes’ achievement. With due recognition of Fermat’s simultaneous and somewhat more precise formulation of the principle of analytic geometry, Descartes’ influence on modern mathematics is generally seen as more profound; he introduced the equivalence of figure and formula, curve and equation, and the pertaining techniques, which became the central characteristics of the mathematics of the subsequent centuries. Viète’s creation of a general symbolic algebra is recognized, but he is criticized for using a cumbersome incomplete symbolic notation and for his insistence on dimensional homogeneity.

It should be noted that, as myth, this evaluation corresponds to a classical 19th and early 20th century value system of mathematics, not to a ‘modern’ one. It is based on a view of mathematics in which the real number system is the central object of interest (hence the negative evaluation of Viète’s insistence on homogeneity) and in which the formulas of analytic geometry and analysis are seen as the essential mathematical tool. This view of mathematics lost its self-evidence during the first half of the present century, when the style of ‘modern mathematics’ emerged and prevailed.²⁷ The real numbers are now recognized as one among other mathematical structures, favoured for good reasons of tradition and applicability, but certainly not the only or the essential one. Abstract formal methods of introducing the mathematical structures and the models of mathematical theories are now adopted as a matter of course because they avoid distracting ontological pitfalls and ensure the broadest applicability of the results. Against this background one would expect a higher evaluation of Viète’s achievements; his formal approach and

1972, p. 316. The Fermatian formulation of the equivalence of curve and equation occurs in his *Isagoge* (cf. note 25), *Oeuvres* edition p. 91.

²⁷Cf. Herbert Mehrtens’ contribution in the present volume.

his ability to create a new abstract mathematical structure reflecting the essentials of the concept of general dimensional magnitude might well be acknowledged as essentially modern. My remark above that the usual assessment of Viète's merit, if not unfair, is incorrect, should therefore be taken as a contribution to the modernization of the myths about early modern mathematics.

But what about reality? Past reality is ultimately inaccessible to us. But we may be sure that to the protagonists the reality of early modern mathematical activity was utterly complex (not least because of the contemporary influence of the myths of Greek mathematics). The distinction of programmes and visions which I worked out in the present lecture does not do justice to this complexity. Yet it may bring us nearer to the early modern mathematical experience than weighing the achievements of that period on the rough balances of later value systems. The visions and the programmes show how the mathematicians reacted to the challenges of their field as they saw it at the time — the structural similarity of the programmes indicates that there was indeed a real and commonly perceived challenge.

Descartes' and Viète's visions and programmes were very much in the present time. Indeed both considered their results as in a way final: 'all problems' were in principle solved. As far as they envisaged a course of mathematics it did not extend far into the future; their interest was more in the past of this course. The port of departure of mathematics was clear, namely classical Greek mathematics, while little if any attention was given to the intermediate shores, such as the episode of Arabic hegemony in mathematics.²⁸ Viète, Fermat and Descartes each valued the relevance of their achievements with respect to the classical Greek heritage. The Greek connection gave prestige and self-evident legitimation. Viète took great care to give his work classical form and standing; Fermat did so too but in a more sober manner; Descartes actually criticized the ancients. But despite differences, all three probably felt much more closely linked with the classical mathematical past than with a distant, 'modern', future.

All three also shared an attitude that was especially characteristic for the early modern period, namely an overriding interest in method. This interest coloured their reaction to the classical heritage; they concentrated on its methodical aspects, in particular on the method of analysis and the mathematical fields nearest to that method.

I have argued above that the differences in the approaches of Viète, Fermat and Descartes related to a special aspect of their doctrines, namely their conception of geometrical construction. In extending the field of geometrical construction beyond the confines of ruler and compass Viète chose for construction by neusis and did not venture beyond the classical solid problems; Fermat applied his algebraic analysis to construction by solid loci; Descartes, aiming at a greater generality, chose for construction by standard curves traced by geometrically accepted motion. These choices were decisive because they implied markedly different attitudes to the extension of the new algebraic analysis to the treatment of curves. Thereby the choices were a major factor in Descartes' eventual predominance in disseminating the principle of analytic geometry.

Thus I find an at first sight perhaps minor theme, the concept of construction, as a crucial factor in the later fate of the achievements of the three protagonists. At the same

²⁸Cf. the contribution of Giovanna Cifoletti.

time I find that a consideration of ‘modernity’ leads to the conclusion that one of our three mathematicians was both the most modern and the most classical, namely Viète. Both conclusions may be somewhat unexpected. If so, then they have the advantage of underlining the complexity of the early modern mathematical reality.

5 Algebraïsche vergelijkingen en Galois-theorie, een historisch overzicht

Inleiding

Evariste Galois (1811-1832) loste in de jaren 1827-1830 een centraal probleem in de algebra op, namelijk het probleem welke algebraïsche vergelijkingen oplosbaar zijn. De naam Galois is in de moderne wiskunde verbonden aan een theorie die de structuur van lichamen beschrijft in termen van de structuur van de automorfismen-groepen van die lichamen.

Hoewel deze twee onderwerpen, oplossing van vergelijkingen en structuur van lichamen, op het eerste gezicht zeer verschillend lijken, is de huidige *Galois-theorie* op natuurlijke en begrijpelijke wijze ontstaan uit het onderzoek van vergelijkingen.

In dit historisch overzicht²⁹ zal die ontwikkeling in grote lijnen worden geschetst.

De oplossing van tweede-, derde- en vierdegraads vergelijkingen

Methoden ter oplossing van tweedegraads vergelijkingen werden al in de Oudheid (Babylonische en Griekse wiskunde) ontwikkeld. Bij deze methoden werden de coëfficiënten en de wortels steeds positief aangenomen, hetgeen ertoe leidde dat er geen algemene methode voor alle tweedegraads vergelijkingen werd gevonden; $x^2 + mx = n$ en $x^2 = mx + n$ bijvoorbeeld vergden verschillende methoden, daar beide vergelijkingen niet tot een gemeenschappelijke vorm konden worden gereduceerd.

De Grieken behandelden kwadratische vergelijkingen in een meetkundige context; zij vatten de onbekende op als een lijnstuk, zijn kwadraat als een vierkant en de coëfficiënten als lijnstukken resp. oppervlakken. In de Babylonische wiskunde werden onbekenden en coëfficiënten als getallen opgevat.

Ziet men af van de genoemde verschillen (meetkundige behandeling, beperking tot positieve grootheden), dan waren de methoden equivalent met de bekende formule voor de oplossing van

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

namelijk

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2)$$

Algemene oplossingen van derde- en vierdegraads vergelijkingen zijn van veel recenter datum; zij stammen uit de eerste helft van de zestiende eeuw, uit de periode van de Renaissance. Zij vormden een van de eerste verworvenheden van de wiskunde in West-Europa die uitstegen boven wat de Oudheid op wiskundig gebied had gepresteerd.

De ontdekkingsgeschiedenis van deze oplossingen is zeer gecompliceerd. Scipione del Ferro (1465?-1526) vond omstreeks 1500 een oplossingsmethode voor een bepaalde vorm van derdegraads vergelijkingen. Hij publiceerde de methode niet, maar deelde haar mee

²⁹De onderstaande tekst is eerder gepubliceerd in een syllabus van het Mathematisch Centrum (MC VC 28/74 aug.), en, als artikel, in *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* 69 (1982), pp. 143-156.

aan vrienden. Een van deze vrienden daagde later, in 1535, Niccolo Tartaglia (1500?-1557) in het openbaar uit een serie derdegraads vergelijkingen op te lossen. Tartaglia slaagde daarin, gaf de oplossingen, maar hield zijn methode geheim. Enige jaren later deelde hij de methode mee aan Geronimo Cardano (1501-1576) die geheimhouding beloofde. Cardano vernam daarna, van del Ferro's vrienden, ook del Ferro's methode. Hij bemerkte dat beide methoden gelijk waren en publiceerde ze in 1545, waarbij hij del Ferro en Tartaglia als onafhankelijke ontdekkers noemde. Intussen had een vriend van Cardano, Ludovico Ferrari (1522-1565), geïnspireerd door Tartaglia's en del Ferro's methoden, een oplossingsmethode voor vierdegraads vergelijkingen gevonden; deze methode werd ook door Cardano in 1545 gepubliceerd.

Er ontstonden daarna hooglopende ruzies over prioriteit en schending van geheimhoudingsbeloften. De hevigheid van de ruzies is begrijpelijk omdat voor een wiskundige als Tartaglia de financiële positie sterk afhing van zijn reputatie. Het winnen van een uitdaging, zoals in het geval van Tartaglia gedaan, was dus een zaak van direct eigenbelang en het was wijze voorzorg om methoden *niet* aan mogelijke rivalen te verraden.

De zestiende-eeuwse algebraïci werkten in het algemeen met positieve grootheden, hoewel af en toe negatieve en zelfs complexe grootheden in hun werk voorkwamen. Het heeft nog tenminste twee eeuwen geduurd voordat deze grootheden algemeen in de wiskundige praktijk werden aanvaard. Hiermee hangt samen dat de hoofdstelling van de algebra - elke n -degraads vergelijking heeft n wortels - eerst laat kon worden geformuleerd en bewezen. Men vindt een formulering bij Albert Girard (1595-1632). Leonhard Euler (1707-1783) formuleert in 1743 het vermoeden dat elke vergelijking met reële coëfficiënten kan worden ontbonden in lineaire en kwadratische factoren. Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) poogt de hoofdstelling te bewijzen (1746). Carl Friedrich Gauss (1777-1855) levert tenslotte (1799) het definitieve bewijs.

Intussen was, door het werk van François Viète (1540-1603) en René Descartes (1596-1650), het gebruik van onbepaalde coëfficiënten (letters) in de vergelijkingenleer ingevoerd. Hierdoor werd het mogelijk algemene oplossingsmethoden in formules op te schrijven; voordien konden methoden alleen als recept worden omschreven en door voorbeelden worden verduidelijkt.

De succesvolle oplossing van de derde- en vierdegraads vergelijkingen bepaalde de probleemstelling van de algebra tot het einde van de achttiende eeuw: het centrale probleem in die periode was het vinden van de oplossing van algemene hogeregraads vergelijkingen, te beginnen met vergelijkingen van de vijfde graad. Men zocht in verschillende richtingen, geïnspireerd door de verschillende methoden die voor derde- en vierdegraads vergelijkingen waren ontwikkeld. Zo kan men bijvoorbeeld de derdegraads vergelijking

$$x^3 + mx^2 + nx + t = 0 \quad (3)$$

reduceren tot een vergelijking

$$y^3 + ny' + t' = 0 \quad (4)$$

door $x = y - a$ te stellen en a zo te bepalen dat na substitutie in (3) de term van y^2 wegvalt (dat lukt voor $a = m/3$). Analoog heeft men gepoogd van hogeregraads vergelijkingen door middel van ingewikkelder transformaties alle tussentermen te verwijderen (werk van E.W. von Tschirnhaus, 1651-1708).

Tevens trachtte men op andere manieren hulp-onbekenden in te voeren, waardoor het probleem werd gereduceerd tot het oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden, waarbij men een van de vergelijkingen enigszins verstandig kiezen kon. Echter alle pogingen tot oplossing van de algemene vijfdegraads vergelijkingen liepen vast en wel òf omdat het rekenwerk onoverkomelijk omvangrijk werd, òf omdat de hulpvergelijkingen van dezelfde graad als of van hogere graad dan de oorspronkelijke vergelijking bleken te zijn. Zo ontstond in de laatste helft van de achttiende eeuw het vermoeden dat de oplossing van de algemene vijfdegraads vergelijking onmogelijk was. Het is van belang precies te omschrijven wat onder het oplossen van een vergelijking werd verstaan. Een vergelijking werd geacht opgelost te zijn, als zijn wortels konden worden uitgedrukt in de coëfficiënten met behulp van $\sqrt{-}$ -vormen (*oplossen door radikalen* wordt dat ook wel genoemd). Hierbij was samenstelling van $\sqrt{-}$ -vormen toegestaan, zoals in de oplossing van de derdegraads vergelijking

$$x^3 + px + q = 0 \quad (5)$$

(tweede term verwijderd, zie (4)), waarvan een oplossing met $\sqrt{-}$ -vormen geschreven kan worden:

$$x = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}. \quad (6)$$

Het vermoeden van onoplosbaarheid betrof de algemene vijfdegraads vergelijking; er waren al van speciale vergelijkingen oplossingen bekend. Zo waren omstreeks 1770 de oplossingen bekend van

$$x^n - 1 = 0 \quad (7)$$

(n -de eenheidswortels), voor lage n ; men kon deze met behulp van $\sqrt{-}$ -vormen schrijven (bijvoorbeeld de derde eenheidswortels $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ en $\varepsilon^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$). Gauss bewees in zijn *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), dat voor elke n de wortels van $x^n - 1 = 0$ met behulp van $\sqrt{-}$ -vormen kunnen worden geschreven. Gauss bepaalde ook voor welke n er alleen kwadraatwortels in de oplossingen optreden; dit betekent dat de bijbehorende regelmatige n -hoek met passer en liniaal construeerbaar is.

Met de oplosbaarheid van (7) is ook in het algemeen de vergelijking

$$x^n - A = 0 \quad (A \text{ reëel; } A > 0) \quad (8)$$

oplosbaar; immers als $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$ de n oplossingen van (7) zijn en $\alpha = \sqrt[n]{A}$ de reële positieve n -demachts wortel uit A is, dan zijn de oplossingen van (8): $\alpha, \alpha\varepsilon_2, \alpha\varepsilon_3, \dots, \alpha\varepsilon_n$. (Voor negatieve A lukt iets dergelijks, maar men moet dan wat voorzichtiger te werk gaan.) Dat wil zeggen dat niet alleen de reële n -de wortels uit een reëel getal A als $\sqrt[n]{-}$ -vorm kunnen worden geschreven maar werkelijk alle, dus ook de complexe, n -de wortels uit A .

Lagrange; permutaties van de wortels

Op dit punt van het verhaal, een punt waar alle pogingen om de algemene vijfdegraads vergelijking op te lossen lijken dood te lopen, komt er een essentiële ommekeer in de

probleemstelling en de onderzoeksmethode bij de studie van algebraïsche vergelijkingen. Deze ommekeer is te danken aan Joseph Louis Lagrange (1736-1813), een van de grootste achttiende-eeuwse wiskundigen. Lagrange werd geboren in Turijn; van 1766 tot 1787 was hij (als opvolger van Euler) verbonden aan de Academie te Berlijn, daarna werkte hij in Parijs. Zijn belangrijkste werk ligt op het gebied van de analyse en de mechanica. Voor de algebra is eigenlijk alleen zijn in 1770/71 verschenen lange artikel over de oplossing van vergelijkingen van belang, maar dit beïnvloedde dan ook de algebra tot ver in de negentiende eeuw.

De nieuwe aanpak van Lagrange bestond daarin dat hij niet rechtstreeks naar oplossingen van vergelijkingen zocht, maar in het algemeen de relaties onderzocht tussen de coëfficiënten, de wortels van de vergelijking en de voor de oplossingsformules in aanmerking komen $\sqrt{-}$ vormen. Tot Lagrange had men steeds geprobeerd de wortels van de vergelijking uit te drukken in de coëfficiënten door middel van $\sqrt{-}$ vormen. Lagrange keerde deze aanpak om, hij onderzocht hoe de coëfficiënten en de optredende $\sqrt{-}$ vormen kunnen worden uitgedrukt in de wortels van de vergelijking. Als $x_1, \dots, x_n$ de wortels zijn van

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \quad (9)$$

dan kan men uit

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (10)$$

direct afleiden dat

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \\ a_1 &= (-1)^{n-1} \{x_2 x_3 \dots x_n + x_1 x_3 \dots x_n + x_1 x_2 x_4 \dots x_n + \dots + x_1 x_2 \dots x_{n-1}\} \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= -(x_1 + x_2 + \dots + x_n). \end{aligned} \quad (11)$$

De coëfficiënten van de vergelijking kunnen dus worden geschreven als functies van de wortels. Deze functies zijn rationaal (ze bevatten geen $\sqrt{-}$ vormen) en ze zijn symmetrisch. Dit laatste betekent dat de functies niet veranderen als men een permutatie (verwisseling) van de wortels $x_1, x_2, \dots, x_n$ uitvoert. Men noemt $a_0, \dots, a_{n-1}$ de elementair symmetrische functies, men kan namelijk afleiden dat elke symmetrische functie van $x_1, \dots, x_n$ als combinatie van de a_i kan worden geschreven. Dit alles was al vóór Lagrange bekend, maar Lagrange onderzocht ook hoe de in de oplossingsformules optredende $\sqrt{-}$ vormen in de wortels kunnen worden uitgedrukt.

We kunnen Lagrange's overwegingen het best weergeven aan de hand van het voorbeeld van een oplossingsformule voor de vierdegraads vergelijking (waarbij we overigens bewijzen en rekenwerk weglaten). Lagrange zelf onderzocht verschillende oplossingsmethoden zowel voor tweede- als voor derde- en vierdegraads vergelijkingen.

Zij

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (12)$$

de algemene vierdegraads vergelijking. De wortels zijn

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - R^2 - 2b + \frac{1}{4}R^{-1}(4ab - 8c - a^3)} \\
x_2 &= -\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - R^2 - 2b + \frac{1}{4}R^{-1}(4ab - 8c - a^3)} \\
x_3 &= -\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - R^2 - 2b - \frac{1}{4}R^{-1}(4ab - 8c - a^3)} \\
x_4 &= -\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - R^2 - 2b - \frac{1}{4}R^{-1}(4ab - 8c - a^3)}
\end{aligned} \tag{13}$$

waarin $R = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b + y}$; y is een wortel van de derdegraads vergelijking

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - a^2d + 4bd - c^2 = 0. \tag{14}$$

Omdat y een wortel van een derdegraads vergelijking is, kan y met behulp van $\sqrt{-}$ -vormen worden geschreven; de formules (13) geven dus inderdaad de gewenste oplossing. De overige in de oplossing optredende $\sqrt{-}$ -vormen zijn:

$$R = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b + y} \tag{15}$$

(R is wortel van de tweedegraads vergelijking $r^2 - (\frac{1}{4}a^2 - b + y) = 0$ als we y in de coëfficiënten toelaten.)

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - R^2 - 2b + \frac{1}{4}R^{-1}(4ab - 8c - a^3)} \\
T_2 &= \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - R^2 - 2b - \frac{1}{4}R^{-1}(4ab - 8c - a^3)}
\end{aligned} \tag{16}$$

(T is wortel van een tweedegraads vergelijking $t^2 - \{\frac{3}{4}a^2 - R^2 - 2b \pm \frac{1}{4}R^{-1}(4ab - 8c - a^3)\} = 0$ als we R (en dus ook y) in de coëfficiënten toelaten.)

Lagrange merkte nu op dat de optredende $\sqrt{-}$ -vormen, evenals de coëfficiënten, geschreven kunnen worden als functies van de wortels, en wel als volgt:

$$y = x_1x_2 + x_3x_4 \tag{17}$$

$$R = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \tag{18}$$

$$T_1 = x_1 - x_2 \quad T_2 = x_3 - x_4 \tag{19}$$

Verder merkte Lagrange op dat de $\sqrt{-}$ -vormen als functie van de wortels een zekere symmetrie vertonen. Weliswaar blijven de functies, zoals in (17), (18) en (19), niet onveranderd onder elke permutatie van de wortels $x_1, \dots, x_4$ (zoals het geval was bij (11)) maar toch zijn er vrij veel permutaties die ze onveranderd laten en bijgevolg nemen ze, onder invloed van de overige permutaties, slechts weinig andere waarden aan. Beschouw bijvoorbeeld

de functie y . Er zijn $4! = 24$ permutaties van de wortels $x_1, \dots, x_4$; y neemt onder deze permutaties slechts drie verschillende waarden³⁰ aan, te weten

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1x_2 + x_3x_4 \\ y_2 &= x_1x_3 + x_2x_4 \\ y_3 &= x_1x_4 + x_2x_3 \end{aligned} \tag{20}$$

De permutaties die y vast laten zijn (in kringsplitsing geschreven): $(1), (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)$. Verder is y wortel van een derdegraads vergelijking (14) en de drie waarden in (20) zijn precies de drie wortels van die vergelijking. Lagrange merkte analoge eigenschappen op bij de andere hulpgrootheden en $\sqrt{-}$ -vormen die optreden in de oplossingen van vergelijkingen tot en met de vierde graad. Hij kwam tot de conclusie dat de belangrijkste hulpgrootheden bij het oplossen van de vergelijkingen juist die functies van de wortels zijn die, onder permutaties van de wortels, een gering aantal waarden aannemen.

Dit inzicht bracht Lagrange ertoe, bij de studie van de n -degraads vergelijkingen, in het algemeen zijn aandacht te richten op rationale functies $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ van de wortels en het aantal waarden bestuderen dat een dergelijke functie aanneemt onder permutaties van de $x_1, \dots, x_n$. Hij vond de volgende belangrijke stellingen:

Stelling 1. Het aantal waarden dat een rationale functie φ van de wortels $x_1, \dots, x_n$ kan aannemen onder permutaties van de x_i is gelijk aan $n!$ of aan een deler van $n!$.

(Vanwege stelling 1 wordt in de groepentheorie de stelling dat het produkt van orde en index van een ondergroep gelijk is aan de orde van de groep, wel de ‘stelling van Lagrange’ genoemd. Men ziet namelijk direct in dat de permutaties die φ vast laten, een ondergroep H van de groep S_n van alle permutaties op n elementen vormen en dat het aantal waarden dat φ kan aannemen gelijk is aan de index van H in S_n (d.w.z. gelijk aan het aantal nevenklassen). Lagrange’s stelling 1 zegt dus dat de index van de ondergroep de orde van de groep deelt. Aangezien het aantal elementen in een nevenklasse gelijk is aan het aantal elementen van de ondergroep, volgt hieruit:

$$\text{orde groep} = (\text{orde ondergroep}) \times (\text{index ondergroep}).$$

Overigens was het begrip *groep* bij Lagrange nog niet aanwezig.)

Stelling 2. Als $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}$ de k verschillende waarden zijn die $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ onder permutaties van de x_i kan aannemen, en men vormt de vergelijking $(v - \varphi^{(1)})(v - \varphi^{(2)}) \dots (v - \varphi^{(k)}) = 0$, en werkt die uit:

$$(v - \varphi^{(1)})(v - \varphi^{(2)}) \dots (v - \varphi^{(k)}) = v^k + b_{k-1}v^{k-1} + \dots + b_1v + b_0 = 0. \tag{21}$$

dan zijn de b_i functies van de x_i die onder alle permutaties onveranderd blijven. De b_i zijn dus symmetrische functies en kunnen (zie (11)) geschreven worden

³⁰‘Waarden’ is de vertaling van de term ‘valeurs’ die Lagrange gebruikt. Hij bedoelt ermee de nieuwe functies die ontstaan als men de plaatsing van de x_i in de formule voor de oorspronkelijke functie verwisselt. Men verwarre ‘waarde’ dus niet met het moderne begrip ‘functiewaarde’.

als rationale combinaties van de coëfficiënten a_i van de vergelijking (9) waarvan de x_i de wortels zijn. φ is dus wortel van een k -degraads vergelijking met coëfficiënten die bekend zijn uit de coëfficiënten van (9).

Stelling 3. Laten φ en ψ rationale functies zijn van $x_1, \dots, x_n$ en laat H de verzameling permutaties zijn die φ onveranderd laten. Als ψ , onder de permutaties uit H , r verschillende waarden aanneemt, dan is ψ wortel van een r -degraads vergelijking met coëfficiënten die rationaal zijn in de oorspronkelijke coëfficiënten (de a_i uit (9)) en in φ .

In het bijzonder volgt hieruit dat rationale functies die onder precies dezelfde verzameling permutaties ongewijzigd blijven, rationaal in elkaar kunnen worden uitgedrukt; de r is dan namelijk gelijk aan 1, zodat ψ wortel is van een lineaire vergelijking met φ in de coëfficiënten, en omgekeerd.

Van stelling 3 hebben we een voorbeeld in (15): $R = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$ neemt onder permutaties die y vast laten, de volgende twee waarden aan:

$$R_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \quad R_2 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4 - x_1 - x_2) \quad (22)$$

en R is inderdaad wortel van een tweedegraads vergelijking met coëfficiënten $(1 \text{ en } \frac{1}{2}a^2 - b + y)$ die rationaal zijn in de coëfficiënten van de oorspronkelijke vergelijking en in y .

Met deze kennis gewapend onderzocht Lagrange het probleem van de vijfdegraads vergelijking. De weg die hij wilde volgen was duidelijk: eerst moest hij een rationale functie φ_1 van de wortels $x_1, \dots, x_5$ zoeken, die, onder permutaties van de x_i , minder dan vijf waarden aannam. Deze φ_1 zou wortel zijn van een vergelijking van de vierde of lagere graad met coëfficiënten rationaal afhankelijk van de oorspronkelijke coëfficiënten; φ_1 zou dus kunnen worden geschreven met behulp van $\sqrt{}$ -vormen en onveranderd blijven onder een verzameling H_1 van permutaties. Vervolgens zou een φ_2 moeten worden gevonden die, onder permutaties uit H_1 , minder dan vijf waarden zou aannemen. Deze φ_2 zou wortel zijn van een vergelijking van de vierde of lagere graad met coëfficiënten rationaal uitdrukbaar in de oorspronkelijke coëfficiënten en in φ_1 , en zou dus met $\sqrt{}$ -vormen kunnen worden geschreven. De permutaties uit H_1 die φ_2 vast laten, zouden een verzameling H_2 vormen.

Dit proces zou moeten worden voortgezet. De H_i worden daarbij steeds kleiner tot tenslotte het aantal elementen van H_k kleiner dan vijf zou zijn. Maar dan kan men φ_{k+1} gelijk aan een wortel kiezen, zeg $\varphi_{k+1} = x_1$. Onder de permutaties uit H_k neemt φ_{k+1} ten hoogste vier waarden aan; x_1 kan dus met behulp van $\sqrt{}$ -vormen in p_k worden uitgedrukt. Men zou dan x_1 volledig met $\sqrt{}$ -vormen kunnen schrijven, waarmee het probleem opgelost zou zijn. In feite zouden bij deze constructie ook functies φ mogen voorkomen die meer dan vier waarden aannemen, maar dan zouden de bijbehorende vergelijkingen (21) van de vorm

$$v^k - A = 0 \quad (23)$$

moeten zijn, daar die vergelijkingen ook met $\sqrt{}$ -vormen kunnen worden opgelost.

Het lukte Lagrange niet zijn programma met succes uit te voeren, of met behulp ervan aan te tonen dat de algemene vijfdegraads vergelijking onoplosbaar is (dit laatste

vermoedde hij overigens wel). Lagrange's bijdrage ligt dus niet in een speciaal resultaat, maar veeleer in het aangeven van een geheel nieuwe richting van onderzoek, die dan ook later zeer vruchtbaar zou blijken.

Ruffini en Cauchy; uitwerking van de permutatie-theorie

Met behulp van Lagrange's methoden poogde Paolo Ruffini (1765-1822) in een serie artikelen waarvan het eerste in 1799 verscheen, te bewijzen dat de algemene vijfdegraads vergelijking niet met $\sqrt{-}$ -vormen oplosbaar is. Zijn pogingen waren niet geheel succesvol. Daarbij waren ze zeer moeilijk te volgen voor zijn tijdgenoten, die niet gewend waren aan de nieuwe aanpak. Ruffini leidde veel resultaten af over het aantal waarden dat rationale functies van de wortels $x_1, \dots, x_5$ kunnen aannemen onder permutaties. Zo bewees hij onder meer dat er geen functies zijn die drie of vier waarden aannemen. Het aantal waarden dat zulke functies kunnen aannemen is, zoals we nu weten, gelijk aan de index van de ondergroep van permutaties die de functies vast laten; Ruffini leidde dus in feite een aantal resultaten over orde en index van permutatiegroepen af.

Een expliciete theorie van permutaties werd pas later (1815) ontwikkeld door Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Cauchy voerde het begrip produkt van twee permutaties in en hij ontwikkelde een goede terminologie en een goede notatie voor permutaties. Hierdoor was hij in staat Ruffini's resultaat te generaliseren; hij bewees dat als een functie in n variabelen onder permutaties van die variabelen k waarden kan aannemen, en als verder p het grootste priemgetal $\leq n$ is, dat dan òfwel $k = 2$, òfwel $k \geq p$. (Voor het geval $n = 5$ is dit precies Ruffini's resultaat.) Hoewel Cauchy nog geen expliciete groepentheorie ontwikkelde, gebruikte hij in zijn bewijs feitelijk groepentheoretische methoden. Cauchy beschouwde met name cyclische permutaties en gebruikte het feit dat even permutaties kunnen worden geschreven als produkt van 3-cycli.

Abel; de vijfdegraads vergelijking is onoplosbaar

Het definitieve bewijs van de onoplosbaarheid van de algemene vijfdegraads vergelijking werd, in 1824, geleverd door de Noorse wiskundige Niels Henrik Abel (1802-1829). Abel bezocht de middelbare school in Oslo, waar zijn wiskundig talent werd ontdekt. Na in zijn eerste jaar op de universiteit het gewone programma te hebben gevolgd, studeerde hij verder zelfstandig en begon te publiceren. Omstreeks deze tijd meende hij de oplossing van de algemene vijfdegraads vergelijking te hebben gevonden. Hij zond zijn oplossing ter publikatie naar Denemarken, maar kreeg het artikel terug met het verzoek het te verduidelijken met voorbeelden en het advies zich met minder steriele takken van de wiskunde, zoals de theorie van elliptische functies, bezig te houden. Abel nam dit advies ter harte; zijn belangrijkste wiskundige werk ligt op het terrein van elliptische functies. Hij poogde ook de gevraagde voorbeelden te leveren en bemerkte daarbij dat hij een fout had gemaakt. Hij kwam tot de overtuiging dat de algemene vijfdegraads vergelijking niet oplosbaar was en bewees dit in 1824. Een eerste, zeer kort geformuleerde publikatie van zijn bewijs kreeg weinig aandacht. In 1825 vertrok Abel voor een studiereis van twee jaar naar Duitsland en Frankrijk. In Berlijn ontmoette hij Crelle (1780-1855) die onder de indruk kwam van Abel's capaciteiten en hem liet publiceren in zijn pas opgerichte

Journal für die reine und angewandte Mathematik (bekend als *Crelle's Journal*). In het eerste nummer (1826) verscheen een uitgewerkte versie van Abel's bewijs dat de algemene vijfdegraads vergelijking niet oplosbaar is. In Parijs ontmoette Abel teleurstellend weinig belangstelling voor zijn werk. In 1827 reisde hij terug naar Noorwegen, waar hij na een jaar een positie aan de universiteit van Oslo kreeg. Zijn wiskundige produktie was zeer groot in die jaren, maar zijn gezondheid ging achteruit - hij had tuberculose. Hij stierf op 26-jarige leeftijd.

Abel gebruikte in zijn bewijs Cauchy's resultaten over het aantal waarden dat een functie van de wortels kan aannemen. Hij bewees dat, als de algemene n -degraads vergelijking oplosbaar was (dus als de wortels zouden kunnen worden geschreven met behulp van $\sqrt{-}$ -vormen en rationale bewerkingen op de coëfficiënten), dat dan die $\sqrt{-}$ -vormen zelf rationale functies van de wortels x_i zouden zijn. (Dit had Lagrange, zoals we hebben gezien, opgemerkt bij de tweede-, derde- en vierdegraads vergelijking. Abel vermeldt niet dat er ook eenheidswortels mogen optreden; het resultaat staat bekend als de stelling van Abel.)

Met behulp van Cauchy's resultaat bewees Abel vervolgens voor het geval van de vijfdegraads vergelijking dat er in elk geval een kwadraatwortel of een vijfdemachts wortel zou moeten optreden.

Schrijft men zo'n $\sqrt{-}$ -vorm als functie van de $x_1, \dots, x_5$, dan moet deze functie òfwel twee, òfwel vijf waarden aannemen onder permutaties van de x_i . Abel bepaalde uit dit gegeven de mogelijke vormen voor de functie en was in staat voor elk van die vormen een tegenspraak af te leiden.

Galois; oplosbaarheid van vergelijkingen

Met Abel's bewijs dat de algemene vijfdegraads vergelijking onoplosbaar is, werd de belangrijkste vraag in de algebra tot dan toe beantwoord. Het zoeken naar de algemene oplossing van hogeregraads vergelijkingen had tot nu toe de richting van het onderzoek bepaald; nu moest zich een nieuwe probleemstelling ontwikkelen. De nieuwe probleemstelling lag voor de hand: de algemene n -degraads vergelijking is niet met $\sqrt{-}$ -vormen oplosbaar; sommige speciale vergelijkingen, zoals $x^n - 1 = 0$, zijn dat wel en de vraag is dus:

Welke algebraïsche vergelijkingen zijn met $\sqrt{-}$ -vormen oplosbaar?

Dit is het probleem dat Galois heeft opgelost.

Evariste Galois is een van de meest tot de verbeelding sprekende figuren uit de geschiedenis van de wiskunde. Hij was een wiskundig genie; hij nam een zeer onorthodoxe houding aan tegenover de wiskundigen en de wiskundige stijl van zijn tijd. Hij was hartsochtelijk geëngageerd in de politieke strijd in Frankrijk na de juli-revolutie van 1830, een engagement dat leidde tot zijn tragische dood op 21-jarige leeftijd. Ondanks de korte spanne tijds waarin Galois' wiskundige vorming en zijn onderzoek zich ontwikkelden, oefenen zijn (door tijdgenoten grotendeels miskende) geschriften een nog steeds waarneembare invloed op de algebra uit. Een invloed die het feit dat zijn naam verbonden is aan een zo belangrijk onderdeel van de moderne algebra als de Galois-theorie volkomen rechtvaardigt.

Galois werd geboren nabij Parijs in 1811. In Parijs bezocht hij het Collège Louis le Grand, waar hij in 1827 met de hogere wiskunde in aanraking kwam en al gauw zijn leraren overtuigde van zijn uitzonderlijke gaven. In 1829 zakte hij voor het toelatingsexamen van de Ecole Polytechnique, vooral omdat hij rebelleerde tegen de methode van examineren. Hij studeerde verder aan de Ecole Normale. Het jaar bracht nog meer tegenslagen en emotionele spanningen. Zijn vader pleegde zelfmoord; een wiskundige studie die Galois had voorgelegd aan de Académie werd teruggezonden met het advies die te herschrijven; een tweede versie ervan raakte bij de Académie verloren. Hierdoor verviel Galois' deelneming aan de Grand Prix voor wiskunde. Weliswaar publiceerde Galois enige artikelen, maar hij kreeg door deze tegenslagen de indruk dat de wiskundigen, ja zelfs de maatschappij in het algemeen, zich tegen hem keerden. Na de juli-revolutie van 1830 werd Galois overtuigd republikein. Hij kon zijn politieke activiteiten en meningen steeds minder in overeenstemming brengen met de discipline op de Ecole Normale; eind 1830 werd hij van de Ecole verwijderd. Hij werd gearresteerd om politieke redenen, maar kwam na een maand weer vrij. Hij legde een nieuwe versie van het verloren gegane artikel voor aan de Académie. Dit stuk bevatte het antwoord op de vraag, welke algebraïsche vergelijkingen oplosbaar zijn. Galois kreeg het echter terug met het commentaar dat de inhoud deels al bekend en deels onbegrijpelijk was. In juli 1831 werd hij weer gearresteerd; in maart 1832 werd hij overgebracht naar een verpleeghuis om er de laatste maand van zijn straf uit te zitten. Hij beleefde er een ongelukkige liefdesaffaire die, onder nog steeds duistere omstandigheden, leidde tot een uitdaging tot een duel. De nacht vóór dit duel schreef Galois brieven aan zijn republikeinse vrienden, ordende zijn wiskundige papieren en schreef een overzicht van zijn ontdekkingen. Zoals hij voorvoelde, werd hij in het duel dodelijk verwond; hij stierf op 31 mei 1832.

Hoewel het overzicht van zijn ontdekkingen in 1832 werd gepubliceerd, duurde het meer dan tien jaar voor Galois' werk werd erkend. In 1843 maakte J. Liouville (1809-1882) bekend dat Galois inderdaad de vraag had beantwoord, welke vergelijkingen met $\sqrt{-}$ -vormen oplosbaar zijn; de betreffende manuscripten werden pas in 1846, door Liouville, gepubliceerd.

Het tot nu toe besproken werk van Lagrange en Abel betrof algemene n -degraads vergelijkingen, dat wil zeggen: er werd verondersteld dat er geen speciale relaties bestaan tussen de coëfficiënten a_i in

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0; \quad (24)$$

de coëfficiënten werden onderling onafhankelijk verondersteld. Dit heeft tot gevolg dat de resultaten van Lagrange en Abel niet zonder meer op speciale vergelijkingen kunnen worden toegepast. Voor de algemene n -degraads vergelijking (24) met wortels $x_1, \dots, x_n$ geldt:

- A.** Een rationale functie φ van de wortels die onveranderd blijft onder elke permutatie van de wortels, is rationaal uitdrukbaar in de coëfficiënten a_i .
- B.** Een rationale functie φ van de wortels die rationaal uitdrukbaar is in de coëfficiënten a_i , verandert niet onder permutaties van de wortels x_i .

Deze uitspraken volgen uit het feit dat de coëfficiënten a_i precies de elementair symmetrische functies van de x_i vormen, zie (11). Echter, voor speciale vergelijkingen gaat de uitspraak B niet meer op. Beschouw bijvoorbeeld de speciale vierdegraads vergelijking

$$x^4 + ax^2 + b = 0. \quad (25)$$

Als x_1 een wortel van (25) is, dan is $-x_1$ ook een wortel; er geldt dus:

$$x_1 + x_2 = 0 \quad x_3 + x_4 = 0. \quad (26)$$

Nu is $\varphi = x_1 + x_2$ rationaal uitdrukbaar in de coëfficiënten (want 0 is rationaal uitdrukbaar in de coëfficiënten) en toch verandert φ onder de permutatie

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{pmatrix} \quad (27)$$

in $x_1 + x_3$. Het blijkt dus dat bij speciale vergelijkingen sommige permutaties ‘niet toegelaten’ zijn. De uitspraken A en B zullen dus gemodificeerd moeten worden door niet de gehele groep S_n te beschouwen, maar de ondergroep G van ‘toegelaten’ permutaties. Verder zijn we eigenlijk niet alleen geïnteresseerd in functies die rationaal uitdrukbaar zijn in de coëfficiënten alleen, maar ook in zekere $\sqrt{}$ -vormen, of andere irrationaliteiten, zeg $\theta_1, \dots, \theta_k$ (dit zijn bijvoorbeeld de y , R en T_i in (13) t.e.m. (16)). Men zegt dat de θ_i ‘geadjungeerd’ zijn bij de coëfficiënten, of dat ze bekend worden verondersteld. Als we nu functies beschouwen die rationaal uitdrukbaar zijn in de coëfficiënten en in dergelijke hulpgrootheden θ_i , dan zullen er weer minder permutaties ‘toegelaten’ zijn, immers zulke permutaties moeten ook de θ_i onveranderd laten. We kunnen nu Galois’ belangrijkste resultaten als volgt omschrijven:

Bij elke n -degraads vergelijking (algemeen of speciaal)

$$f(x) = 0 \quad (28)$$

en elke keuze van bekend veronderstelde irrationaliteiten $\theta_1, \dots, \theta_k$, is er een groep G van permutaties van de wortels van (28) zo, dat

C. Een rationale functie φ van de wortels die onveranderd blijft onder de permutaties uit G , is rationaal uitdrukbaar in de coëfficiënten van f en in de $\theta_1, \dots, \theta_k$.

D. Een rationale functie φ van de wortels die rationaal uitdrukbaar is in de coëfficiënten van f en in de $\theta_1, \dots, \theta_k$, blijft onveranderd onder alle permutaties uit G .

Galois formuleert deze stelling zonder de θ_i expliciet te noemen; hij spreekt over ‘rationaal bekend’, bedoelende: rationaal uitdrukbaar in die grootheden die bekend zijn verondersteld. G wordt de groep van de vergelijking genoemd. Galois bewijst het bestaan van zo’n groep voor elke vergelijking door expliciet aan te geven hoe G kan worden geconstrueerd. Die constructie is in principe steeds mogelijk, maar praktisch, door het vereiste rekenwerk, vrijwel niet uitvoerbaar. G hangt af van de keuze van de θ_i ; voegt men een

nieuwe irrationaliteit θ_{k+1} toe, dan wordt de groep van de vergelijking G' ; steeds geldt dat G' gelijk is aan G of aan een ondergroep van G . Dus door adjunctie van irrationaliteiten kan men de groep van een vergelijking reduceren tot een ondergroep. Heeft men door successieve adjunctie van θ_1 t.e.m. θ_k de groep van de vergelijking gereduceerd tot de identiteit, dan is de vergelijking oplosbaar in de $\theta_1, \dots, \theta_k$; immers dan voldoet $\varphi = x_1$ aan de voorwaarde onder C en is daardoor rationaal uitdrukbaar in $\theta_1, \dots, \theta_k$ en de coëfficiënten.

Galois beschouwt het effect van adjunctie van een irrationaliteit θ op de groep G van de vergelijking meer in detail. Laat de irrationaliteit θ wortel zijn van een irreducibele, d.w.z. niet in factoren ontbindbare, vergelijking

$$g(t) = t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \dots + b_1t + b_0 = 0, \quad (29)$$

waarbij de b_i rationaal bekend zijn (vergelijk (14) t.e.m. (16)). Laat (29) als wortels hebben $\theta = \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(m)}$. Laat door adjunctie van $\theta^{(i)}$ de groep van de vergelijking gereduceerd worden tot de ondergroep H_i van G . Galois merkte op dat de H_i geconjugeerde ondergroepen zijn (dat wil zeggen dat er bij elke H_p en H_q een permutatie $\pi \in G$ is met $\pi H_p \pi^{-1} = H_q$; Galois formuleert dit overigens op een andere manier). Als deze geconjugeerde ondergroepen onderling gelijk zijn, dus $H_i = H$ voor all i , dan zijn alle $\theta^{(i)}$ rationaal bekend zodra één ervan geadjungeerd is. In dit geval is H een *normaaldeler* van G ; dit begrip werd door Galois ingevoerd. Omgekeerd, als alle $\theta^{(i)}$ rationaal uitdrukbaar zijn in één van de $\theta^{(i)}$, dan reduceert adjunctie van één van de $\theta^{(i)}$ de groep G van de vergelijking tot een *normale* ondergroep (normaaldeler) H . Met dit begrippenapparaat was Galois in staat het probleem op te lossen welke n -degraads vergelijkingen oplosbaar zijn met $\sqrt{-}$ vormen. Zo'n vergelijking is namelijk oplosbaar als de successievelijk geadjungeerde θ 's wortels zijn van de vergelijkingen van de vorm

$$t^n - A = 0 \quad (\text{dan } \theta = \sqrt[n]{A}) \quad (30)$$

waarbij A rationaal is in de coëfficiënten en de reeds geadjungeerde θ 's. Men kan zich beperken tot priemgetallen n (want als $n = p_1 p_2$, dan $\sqrt[n]{A} = \sqrt[p_1]{\sqrt[p_2]{A}}$). Galois veronderstelde nu dat de p -de eenheidswortels reeds geadjungeerd zijn (immers, sinds Gauss was bekend dat deze met behulp van $\sqrt{-}$ vormen kunnen worden geschreven) en hij merkte op: als θ oplossing is van

$$g(t) = t^p - A = 0 \quad (31)$$

en $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ zijn de p -de eenheidswortels, dan zijn de wortels van (31):

$$\theta^{(1)} = \alpha_1 \theta, \theta^{(2)} = \alpha_2 \theta, \dots, \theta^{(p)} = \alpha_p \theta.$$

De wortels van (31) zijn dus rationaal uitdrukbaar in één wortel van (31); adjunctie van θ reduceert G tot een normale ondergroep H van G . Galois toonde aan dat de index van H in G gelijk is aan p . Hij merkte ook op dat, omgekeerd, als G een normale ondergroep H heeft met index p , er een p -demachts wortel θ geadjungeerd kan worden zo, dat de groep G tot de groep H reduceert.

Hiermee kon Galois het criterium voor oplosbaarheid met $\sqrt{-}$ vormen formuleren:

Een vergelijking $f(x) = 0$ is oplosbaar met $\sqrt{}$ -vormen als de groep G van de vergelijking een decompositie in ondergroepen $H_0, \dots, H_k$ toelaat, waarbij

$$(1) = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{k-1} \subset H_k = G,$$

zo, dat elke H_i een normale ondergroep van H_{i+1} is met index p_i , p_i priem. De p_i zijn de priemfactoren van de orde van G .

Ontwikkelingen van de Galoistheorie na Galois

Het duurde enige tijd voordat de betekenis van Galois' werk werd erkend. In 1852 verscheen een uiteenzetting van Galois' ideeën door Enrico Betti (1823-1892) in het italiaans; Betti leverde bewijzen voor een aantal uitspraken die Galois zonder volledig bewijs had geponeerd. Charles Hermite (1822-1901), J.A. Serret (1819-1885), Leopold Kronecker (1823-1891) en anderen toonden interesse voor Galois' werk. De derde editie (1866) van Serret's *Cours d'Algèbre Supérieure* was het eerste leerboek waarin Galois' theorie werd behandeld. Serret voltooide vele bewijzen van Galois maar werkte de theorie nauwelijks verder uit. Zijn publikatie bracht tenslotte de verdiende algemene bekendheid voor Galois' werk. Nog belangrijker voor Galois' theorie was *Traité des substitutions et des équations algébriques* ('substitution' is een term voor permutatie) van Camille Jordan (1838-1922), dat in 1870 verscheen. Het werk gaf een samenvatting van de tot dan toe bekende theorie van permutatiegroepen en van vergelijkingen. Het bevatte ook vele originele bijdragen van Jordan zelf. Met de publikaties van Serret en Jordan was Galoistheorie, in de vorm die we hierboven hebben aangegeven, een geaccepteerd en belangrijk onderdeel van de algebra geworden.

De Galoistheorie heeft in de daaropvolgende jaren een sterke ontwikkeling doorgemaakt, waarbij de theorie essentieel van karakter veranderde. Deze ontwikkeling was driedelig:

- Ten eerste werd de vraag naar de oplosbaarheid van vergelijkingen losgelaten, of in elk geval verdrongen naar de status van toepassing van Galoistheorie.
- Ten tweede werd het begrip *lichaam* ingevoerd om relaties die voordien werden omschreven met termen als '*rationaal uitdrukbaar in*' te verduidelijken.
- Tenslotte werd de opbouw van de theorie van vergelijkingen uit losgelaten; Galoistheorie werd een theorie over lichamen. In plaats van de wortels van een vergelijking werden *automorfismen van lichamen* beschouwd.

Deze driedelige ontwikkeling verliep geleidelijk, dit in tegenstelling tot de veranderingen die door Lagrange en Galois in de theorie werden teweeggebracht. Het is moeilijk om, zonder te veel in detail te treden, deze ontwikkeling precies te volgen. Ik volsta daarom met een globale beschrijving ervan.

Galois' oplossing van het centrale probleem van de algebra na Abel (welke vergelijkingen zijn met $\sqrt{}$ -vormen oplosbaar?) leidde tot een nieuwe vraagstelling. Allereerst rees de vraag of Galois' criterium in speciale gevallen nader kon worden gepreciseerd. Galois zelf onderzocht al het geval waarbij de graad van de vergelijking priem is. Het latere onderzoek in deze richting leidde tot de studie van *eindige lichamen* en *lineaire groepen*.

Belangrijker was dat men ging inzien dat de oplosbaarheid met $\sqrt{}$ -vormen eigenlijk slechts een speciale eigenschap van de groep van de vergelijking of van de aard van de

te adjungeren irrationaliteiten was. Men ging zich interesseren voor de structuur van de groep van de vergelijking en de ondergroepen daarvan in het algemeen, alsmede voor de adjunctie van irrationaliteiten in het algemeen en voor het verband tussen beide zaken. De theorie werd dus veel algemener, het oorspronkelijke probleem werd een speciale toepassing ervan.

Deze verschuiving naar een algemene structuurtheorie van groepen en van adjunctie werd mogelijk gemaakt door de opkomst van het begrip *lichaam*. In het voorafgaande is herhaaldelijk sprake geweest van ‘rationale uitdrukbaarheid’. Laten φ en ψ twee grootheden zijn die rationaal uitdrukbaar zijn in de coëfficiënten $a_0, \dots, a_{n-1}$ van een zekere n -degraads vergelijking en in zekere hulpgrootheden $\theta_1, \dots, \theta_k$. Dat wil zeggen dat φ en ψ uit de a ’s en de θ ’s gevormd zijn door optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling (mits niet door 0). Dat houdt dan weer in dat ook $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi \cdot \psi$ en φ/ψ (mits $\psi \neq 0$) rationaal uitdrukbaar zijn in de a ’s en de θ ’s. De rationaal uitdrukbare grootheden (ofwel de *bekend veronderstelde* grootheden) vormen dus een systeem dat gesloten is onder de vier arithmetische bewerking, d.w.z. zij vormen een *lichaam*. Adjunctie van een nieuwe θ komt neer op uitbreiding van het oorspronkelijke lichaam tot een groter lichaam van ‘bekend veronderstelde’ grootheden. De uitdrukkingen die rationaal zijn in de wortels $x_1, \dots, x_n$ van een vergelijking $f(x) = 0$, vormen eveneens een lichaam (dit lichaam wordt in de moderne Galoistheorie het splijtlichaam van f genoemd). De boven geschetste theorie van Galois kan men dus her-interpreteren met behulp van het begrip lichaam: Eerst wordt gevormd het lichaam van de vormen die rationaal uitdrukbaar zijn in de coëfficiënten van de vergelijking. Zo nodig worden eenheidswortels geadjungeerd; het zo ontstane lichaam wordt *grondlichaam* genoemd. Dit grondlichaam wordt door successieve adjunctie uitgebreid tot het tenslotte gelijk is aan het splijtlichaam. De lichamen die door adjunctie ontstaan, zijn deellichamen van het splijtlichaam.

Het begrip lichaam vindt zijn oorsprong in het werk van Kronecker (die sprak van *Rationalitätsbereich*) en Richard Dedekind (1831-1926) (die de term *Körper* invoerde). Kronecker was vooral geïnteresseerd in uitbreidingen van het lichaam van de rationale getallen als middel om irrationale getallen zuiver arithmetisch constructief te definiëren. Hij publiceerde een samenvatting van zijn studies in deze richting in 1882. In tegenstelling tot Kronecker, wiens ‘Rationalitätsbereiche’ gedefinieerd werden als bevattende alle grootheden die rationaal uitdrukbaar zijn in zekere gegeven grootheden, voerde Dedekind het begrip lichaam in door middel van de eigenschap van gesloten-zijn onder de arithmetische bewerkingen. Elk systeem van reële of complexe getallen dat gesloten is onder optellen, aftrekken, vermenigvuldiging en delen, noemde hij een lichaam. Dedekind ontwikkelde het begrip in de vijftiger jaren van de 19e eeuw in studies over getaltheorie; het begrip lichaam kreeg echter vooral bekendheid door Dedekinds uiteenzetting ervan in 1894 in een supplement bij de vierde editie van het leerboek van Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) over getaltheorie.

Zowel Kronecker als Dedekind hebben hun begrippen Rationalitätsbereich en Körper in verband met Galoistheorie gebracht. Door hun werk was het om de eeuwwisseling algemeen aanvaard dat Galoistheorie een theorie was over vergelijkingen en bijbehorende lichamen en hun uitbreidingen.

In het begin van de 20e eeuw ontstond het inzicht dat de rol van de vergelijkingen in de theorie niet essentieel is, en dat Galoistheorie een theorie van lichamen in het algemeen

behoort te zijn. In de Galoistheorie werden vergelijkingen gebruikt om over de permutaties van hun wortels te kunnen praten; deze permutaties vormden de groepen waarmee de structuur van de lichaamsuitbreidingen kon worden beschreven. Om tot een zuivere theorie van lichamen te komen, moesten deze groepen onafhankelijk van vergelijkingen worden gedefinieerd. Dit bleek nu mogelijk doordat de permutaties van de wortels kunnen worden opgevat als automorfismen van het splijtlichaam. Zij f een vergelijking met grondlichaam F en wortels $x_1, \dots, x_n$. Het splijtlichaam (het lichaam van de rationale vormen in de x_i) zij M . Men gaat eenvoudig na dat elk automorfisme van M dat F elementsgewijs vast laat, de x_i permuteert. Omgekeerd, een permutatie π uit de Galois-groep van de vergelijking (dus een ‘toegestane’ permutatie van de wortels) induceert op M een automorfisme dat F elementsgewijs vast laat. De ‘groep van de vergelijking’ in Galois’ zin kan dus worden opgevat als de groep van automorfismen van het splijtlichaam, die het grondlichaam elementsgewijs vast laten. Het inzicht dat de Galois-groep zo kan worden geïnterpreteerd, is al bij Dedekind aanwezig; het werd gemeengoed in de eerste decennia van de 20e eeuw.

Hiermee was de weg vrij voor een opvatting van de Galoistheorie als theorie van lichamen en bijbehorende automorfismengroepen. Gedurende de 19e eeuw werden in de Galoistheorie uitsluitend deellichamen van de complexe getallen beschouwd; nu konden ook andere lichamen (eindige lichamen bijvoorbeeld) worden bestudeerd met behulp van de Galoistheorie. De opvatting van de Galoistheorie als algemene theorie van lichamen blijkt al in de presentaties van de theorie door wiskundigen als E. Steinitz (1910) en B.L. van der Waerden (*Moderne Algebra*, 1930). Men kan deze ontwikkeling als voltooid beschouwen in de presentatie van de theorie door Emil Artin (colleges in 1926, publikatie in 1938-1942).

Slot

Ik heb in het bovenstaande in grote lijnen geschetst hoe zich uit de studie van vergelijkingen de Galoistheorie heeft ontwikkeld. Ik wil het overzicht besluiten met twee algemene opmerkingen.

De ontwikkeling van de Galoistheorie is in zeker opzicht typerend voor de ontwikkeling van de wiskunde in de afgelopen periode van circa 100 jaar. Men ziet namelijk bij de Galoistheorie een verschuiving van de interesse van objecten (vergelijkingen en hun wortels) naar structuren (lichamen met hun deellichamen, groepen met hun ondergroepen). In plaats van de afzonderlijke rationale uitdrukkingen in de coëfficiënten of in de wortels, worden de verzamelingen van al dergelijke uitdrukkingen beschouwd; in die verzamelingen wordt een structuur onderkend (het zijn lichamen); de verzamelingen blijken tezamen weer een structuur te vormen (de door inclusie geordende verzameling van deellichamen van een lichaam). Een analoge ontwikkeling is zichtbaar in de behandeling van de permutatiegroepen. De nieuwe beschouwingswijze maakt het mogelijk om anderszins nauwelijks formuleerbare eigenschappen te omschrijven (bijvoorbeeld de normaaldeler-eigenschap); zij maakt het ook mogelijk, de resultaten aanmerkelijk te generaliseren. Dit proces nu, het bestuderen van gestructureerde verzamelingen, valt op vele andere gebieden van de wiskunde in de laatste 100 jaar aan te wijzen, bijvoorbeeld in het bestuderen van functieruimten in plaats van afzonderlijke functies in de analyse en, meer recent, in de studie

van categorieën.

De ontwikkeling van de Galoistheorie geeft ook een fraai voorbeeld van wat er zo al met wiskundige problemen gebeuren kan, van hoe de probleemstellingen in de wiskunde zich kunnen wijzigen. Voor het probleem van het bepalen van wortels van een n -degraads vergelijking werd, voor $n \leq 4$, een oplossing gevonden. Voor $n = 4$ had deze oplossing, wegens de ingewikkeldheid, al nauwelijks meer praktische waarde; voor de feitelijke berekening van de wortels bleken benaderende procédés doelmatiger. Voor $n \geq 5$ werd bewezen dat de bepaling van de wortels door middel van een algemene formule onmogelijk was. De dan opkomende vraag: welke vergelijkingen zijn wèl oplosbaar? werd beantwoord, maar het antwoord had voor de bepaling of een gegeven vergelijking oplosbaar is, noch voor de feitelijke oplossing ervan, praktisch enige waarde. De Galoistheorie ontwikkelde zich als het ware met achterlating van het probleem van de feitelijke bepaling van de wortels van vergelijkingen.

De door Galois beantwoorde vraag naar een criterium voor oplosbaarheid bleek vervolgens een weinig natuurlijke vraag in het, ter beantwoording ervan, ontwikkelde begrippenapparaat. Er kwam daarom een nieuwe vraagstelling op, namelijk hoe in het algemeen de adjunctie van irrationaliteiten en de reductie van groepen van toegelaten permutaties van wortels van vergelijkingen samenhangen. Ook deze vraagstelling bleek, na de invoering van het begrip lichaam, tè speciaal voor het ontwikkelde begrippenapparaat; de vergelijkingen werden geheel losgelaten, de permutaties van de wortels werden automorfismen van lichamen. Of en hoe de vraagstelling in de Galoistheorie zich verder heeft gewijzigd of zich nog wijzigen zal, past niet meer in deze historische bespreking.

Men ziet echter: de wiskunde schrijft niet voort door de oplossing van problemen maar door de wijziging ervan.

Literatuur

Het hier behandelde kan men aanmerkelijk meer gedetailleerd beschreven vinden in:

B.M. Kiernan, "The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin", *Archive for History of Exact Sciences* 8 (1971/1972), pp. 40-154;

B.L. van der Waerden, "Die Galois-Theorie von Heinrich Weber bis Emil Artin", *Archive for History of Exact Sciences* 9 (1972/1973), pp. 220-248.