

Geschiedenis van de Wiskunde

Opdracht I-1: Egyptische Stereometrie

Inleiding

Een van de hoogtepunten van de Egyptische wiskunde is de berekening van het volume van een afgeknotte pyramide, dat wil zeggen van het lichaam dat ontstaat wanneer men een pyramide (met vierkant grondvlak) snijdt met een horizontaal vlak en het bovenste deel wegneemt. Over die berekening gaat deze opdracht.

Bron

We kennen de berekening uit de zogenaamde “Mathematische Papyrus Moskou”, zo genoemd omdat hij in Moskou bewaard wordt. Die papyrus, geschreven in de achttiende eeuw voor Christus, bevat 25 wiskundige problemen; het veertiende probleem betreft de inhoud van een afgeknotte pyramide.

De volledige tekst van de Papyrus Moskou is te vinden in de publikatie van Struve (zie de literatuurlijst aan het eind van deze opdracht).

Teksten

A. Facsimile van de tekst in de papyrus, geschreven in het zogenaamde hiëratische schrift, met transcriptie in hiërogllyphen door Struve, uit Struve’s editie, platen V en VI, kolommen 27-29.

B. Duitse vertaling van de tekst, door Struve, p. 135.

C. Uitleg van Egyptische getalnotatie en rekenkunde door Dr J.P. Hogendijk in een diktaat (Brown University, Providence, 1983).

Opmerkingen over de teksten De voetnoten in tekst **B** betreffen filologische overwegingen; die zijn hier niet opgenomen.

Voor de afgeknotte pyramide opdracht heb je de gedeelten uit tekst **C** over “auxiliary numbers”, “division” en de “2:n-table” niet nodig.

Opdracht

De opdracht kan worden uitgevoerd zonder andere hulpmiddelen dan de hierbij opgenomen teksten. Verdere gegevens over het probleem vind je in de hieronder genoemde literatuur. Het is natuurlijk toegestaan die bronnen te raadplegen, maar het is meer instructief om eerst zelf de opdracht alleen op basis van de hier gegeven teksten uit te voeren.

Beantwoord schriftelijk en kort de volgende vragen:

1. Wat is het resultaat dat hier berekend of afgeleid wordt?
2. Hoe zou je dat resultaat zelf berekenen of afleiden?
3. Geef de redenering in de tekst weer in moderne terminologie en notatie maar zo dicht mogelijke aansluitend bij het origineel.
4. Geef aan waar de weergave in **3** essentieel afwijkt van het origineel.
5. Noem een aantal aspecten van de tekst die je opvallen.
6. Welke verdere vragen roept de tekst op en hoe zou je die vragen nader willen onderzoeken?

NB De uitwerking van de opdracht moet een *werkstuk* zijn; dat wil zeggen een zelfstandig leesbare tekst (de lezer wordt niet verondersteld andere stukken ter beschikking te hebben) waarvan de status duidelijk is aangegeven (namen van de schrijvers, titel en gelegenheid van het stuk staan op de eerste pagina vermeld) en voorzien van een korte inleiding die duidelijk maakt wat er gaat volgen.

Literatuur

Chace, A.B. e.a., *The Rhind mathematical Papyrus* (2 vols), Oberlin (Ohio), 1927-1929.

Gillings, R. J., *Mathematics in the times of the Pharaoh's*, Cambridge (Mass) etc., 1972 (Dover reprint 1982).

Neugebauer, Otto, *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, vol. 1, *Vorgriechische Mathematik*, Berlin, 1934.

Peet, T.E., *The Rhind mathematical papyrus*, London 1923

Robins, Gay en Shute, Charles, *The Rhind mathematical papyrus : an ancient Egyptian text* (herdruk, oorspr. uitg. 1987), New York (Dover), n.d.

Struve, W.W., "Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau" (*Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Ser. A., 1), Berlin 1930.

Vogel, Kurt, *Die Grundlagen der Aegyptischen Arithmetik*, Wiesbaden, 1970 (oorspr. 1929).

Vogel, K., *Vorgriechische Mathematik*, vol. 1, *Vorgeschichte und Aegypten*, Hannover, 1958.

Waerden, Bartel L. van der, *Ontwakende Wetenschap*, Groningen, 1950.

Vervolgopdracht

Een Egyptische deling

Inleiding

De Egyptenaren kenden bij het delen alleen breuken van de vorm $1/n$ (met enige uitzonderingen). Dat leidde ertoe dat hun procedures voor delen zeer gecompliceerd waren. Een goed voorbeeld daarvan levert de onderstaande tekst, die de deling behandelt van 33 door $(1 + 2/3 + 1/2 + 1/7)$.

Bron

Papyrus Rhind. Dit is een mathematische tekst, geschreven ca. 1650 voor Christus, nu bewaard in het British Museum te Londen als onderdeel van de collectie verzameld door A.H. Rhind. De tekst is een kopie van een origineel uit ca. 1850 voor Christus. Hij bevat bijna negentig wiskundige problemen met oplossing. De tekst is uitgegeven door Chace, zie de literatuurlijst.

Teksten

D. Facsimile van het hiëratistische origineel van probleem nr 31. Uit Chace, vol 2, plate 53.

E. Transcriptie van de tekst in hiëroglyphen, en transcriptie daarvan in letters en cijfers. Uit Chace, vol 2, plate 53. (Op dit blad staat ook een groep hiëratistische tekens met transcriptie. Dit betreft een berekening die bij het probleem hoort maar elders in de papyrus staat.)

F. Vertaling en commentaar, uit het boek van Peet (zie literatuurlijst) pp. 66-67.

Opdracht

Probeer, met behulp van Hogendijk's uitleg (tekst **C**), de gang van de berekening te begrijpen. Geef daarna de berekening.

Egyptian arithmetic.

Source: Papyrus Rhind, copied ca. 1650 B.C. from an older text, written ca. 1850 B.C. The papyrus was discovered in 1851, it is now in the British Museum in London.

Numbers Hieroglyphic: 1 = | , 10 = ∩ , 100 = 9 , 432 = ||||| 9999 .

Hieratic (abbreviated form of hieroglyphic; this is the script in which the Papyrus Rhind was written)

1	10 ∩	100 9	1000 1
2	20 ∩	200 9	
3	30 ∩	300 9	
4 — or	40 ∩	400 9	$\frac{1}{2}$ >
5 𓂏	50 𓂏	500 𓂏	$\frac{1}{4}$ /
6 or 𓂏	60 𓂏	600 𓂏	$\frac{1}{4}$ X
7 2	70 𓂏	700 𓂏	$\frac{2}{3}$ 1
8 =	80 𓂏	800 𓂏	
9 𓂏	90 𓂏	900 𓂏	

Unit fractions: $\frac{1}{n}$ is obtained by putting the symbol ∩ (Hieratic: a dot) above n. Thus $\frac{1}{12} = \overset{\cdot}{12}$

We shall transcribe all hieroglyphic and hieratic numbers as Hindu-Arabic numbers, and use the notation $\bar{n}$ for $\frac{1}{n}$. Special symbols for $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$. There was no notation for $\frac{m}{n}$, $m > 1$.

(Exception: $\frac{2}{3} = \overset{\cdot}{9}$, we shall say $\bar{3}$.) Instead of $\frac{2}{5}$ one writes $\bar{3}$ 15, etc.

Addition for fractions use the $\frac{2}{n}$ - table given at the beginning of the papyrus. See p. HM 83 5

Subtraction. Problems are phrased like: "complete a to b" (the answer would be $b - a$). Cf. page HM 83 6

Auxiliary numbers. In order to perform difficult additions and subtractions involving fractions, one expresses everything in parts of a suitable number N. (Ex: $\frac{1}{4}$ is 14 parts of 56). The numbers of the parts are written in red, N is not written. Example from Rhind papyrus, problem 33: Complete $\bar{3}$ $\bar{4}$ $\bar{28}$ to 1. Solution: the scribe writes 28 10 $\bar{2}$ 1 $\bar{2}$ in red, (That is to say: $\bar{3}$ is 28 parts of 42, $\bar{4}$ is 10 $\frac{1}{2}$ parts of 42 etc.) The total of 28, 10 $\bar{2}$, 1 $\bar{2}$ is 40. This has to be completed to 42 (because 1 is $\frac{42}{42}$ parts of 42). The answer is therefore: 2 (parts of 42), or that is to say $\bar{21}$. Modern historians call the red numbers the auxiliary numbers.

Multiplication of integers, a times b : the process is based on repeated doubling. The calculation is arranged in two vertical columns. In the first column one writes 1, 2, 4, 8 In the second column one calculates successively b , $2b$, $4b$, $8b$ The numbers in the first column which add up to a are then provided with a check, and the corresponding numbers in the second column are added to obtain a times b .
Example: see Struik p. 20. (the asterisk is unhistorical)
Q: why does this process always work out?

Multiplication involving fractions:

One also uses repeated halvings (in the first column one writes 2, 4, 8, ... in the second column $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{4}b$, $\frac{1}{8}b$, etc.)
Alternatively, one starts with a multiplication by two-thirds followed by a series of halvings (thus one obtains

$\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{6}b$, $\frac{1}{12}b$...). Occasional multiplication by 10 or $\frac{1}{10}$.
Q: when can this process be used?

Division $a : b$ the problem is phrased like: count with b to find a .

Example: $a = 13$, $b = 6$:

1	6
/2	12
3	4
3	2
/6	1

answer: $2\frac{1}{3}$

If one cannot find the answer by means of doubling, halving and multiplication by two-thirds alone, one usually "counts with" b until one finds a minus a small remainder R (one first determines $(a-R) : b$). R is of course written as a sum of unit fractions $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$, To determine $R : b$ one

uses the rule $\frac{1}{r_1} : b = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{b}$. If b is fractional, one

calculates with auxiliary numbers. One expresses R and b as NR (parts of N) and Nb (parts of N), N is chosen in such a way that Nb is an integer. Then $R : b = NR$ (parts of N) : Nb (parts of N)

— ~~NR~~ Example: see problem 31, page HM 837.
WARNING; This explanation in modern terminology does not necessarily correspond to the way in which the scribe of the papyrus argued.

Q: Did the Egyptians have the concept of a common denominator of two or more fractions? What is the relation with the auxiliary numbers

Example from Egyptian geometry: the volume of a truncated pyramid.
Source: Moscow papyrus, written in the 18th century B.C, discovered in ca. 1893, now in Moscow. See op. HM 8310.

Q: Did the Egyptians have a general rule for the formula of a truncated pyramid? If so, which rule? How could they have found such a rule? Did they have a proof of it? Can you prove it?

The $\frac{2}{n}$ - table (from the beginning of the Rhind papyrus)

$2:3 = \overline{2} + \overline{6}$	$2:53 = \overline{30} + \overline{318} + \overline{795}$
$2:5 = \overline{3} + \overline{15}$	$2:55 = \overline{30} + \overline{330}$
$2:7 = \overline{4} + \overline{28}$	$2:57 = \overline{38} + \overline{114}$
$2:9 = \overline{6} + \overline{18}$	$2:59 = \overline{36} + \overline{236} + \overline{531}$
$2:11 = \overline{6} + \overline{66}$	$2:61 = \overline{40} + \overline{244} + \overline{488} + \overline{610}$
$2:13 = \overline{8} + \overline{52} + \overline{104}$	$2:63 = \overline{42} + \overline{126}$
$2:15 = \overline{10} + \overline{30}$	$2:65 = \overline{39} + \overline{195}$
$2:17 = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$	$2:67 = \overline{40} + \overline{335} + \overline{536}$
$2:19 = \overline{12} + \overline{76} + \overline{114}$	$2:69 = \overline{46} + \overline{138}$
$2:21 = \overline{14} + \overline{42}$	$2:71 = \overline{40} + \overline{568} + \overline{710}$
$2:23 = \overline{12} + \overline{276}$	$2:73 = \overline{60} + \overline{219} + \overline{292} + \overline{365}$
$2:25 = \overline{15} + \overline{75}$	$2:75 = \overline{50} + \overline{150}$
$2:27 = \overline{18} + \overline{54}$	$2:77 = \overline{44} + \overline{308}$
$2:29 = \overline{24} + \overline{58} + \overline{174} + \overline{232}$	$2:79 = \overline{60} + \overline{237} + \overline{316} + \overline{790}$
$2:31 = \overline{20} + \overline{124} + \overline{155}$	$2:81 = \overline{54} + \overline{162}$
$2:33 = \overline{22} + \overline{66}$	$2:83 = \overline{60} + \overline{332} + \overline{415} + \overline{498}$
$2:35 = \overline{30} + \overline{42}$	$2:85 = \overline{51} + \overline{255}$
$2:37 = \overline{24} + \overline{111} + \overline{296}$	$2:87 = \overline{58} + \overline{174}$
$2:39 = \overline{26} + \overline{78}$	$2:89 = \overline{60} + \overline{356} + \overline{534} + \overline{890}$
$2:41 = \overline{24} + \overline{246} + \overline{328}$	$2:91 = \overline{70} + \overline{130}$
$2:43 = \overline{42} + \overline{86} + \overline{129} + \overline{301}$	$2:93 = \overline{62} + \overline{186}$
$2:45 = \overline{30} + \overline{90}$	$2:95 = \overline{60} + \overline{380} + \overline{570}$
$2:47 = \overline{30} + \overline{141} + \overline{470}$	$2:97 = \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$
$2:49 = \overline{28} + \overline{196}$	$2:99 = \overline{66} + \overline{198}$
$2:51 = \overline{34} + \overline{102}$	$2:101 = \overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606}$

From the 2 : n - table, division of 2 by 37 (translation of Peet, p.42)

Division of 2. DIVIDE 2 by 37. (Pl. B.)

$1\frac{1}{2} + \frac{1}{24}$ is $\frac{1}{24}$ th, $\frac{1}{3}$ is $\frac{1}{11}$ th, $\frac{1}{8}$ is $\frac{1}{29}$ th.

Working out:

1	37
$\frac{2}{3}$	$24\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$12\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$	$6\frac{1}{6}$
$\frac{1}{12}$	$3\frac{1}{12}$
$\frac{1}{24}$	$1\frac{1}{2} + \frac{1}{24}$
	Remainder $\frac{1}{3} + \frac{1}{8}$
1	37
2	74
3	111 $\frac{1}{3}$
	Remainder $\frac{1}{8}$
1	37
2	74
4	148
8	296 $\frac{1}{8}$

A "subtraction" from the papyrus Rhind (trl. Peet, p. 58)

The italic numbers are the red numbers in the manuscript (the so-called auxiliary numbers)

No. 21. No. 21. (Pl. H.)

"It is said to you 'What completes $\frac{2}{3} + \frac{1}{15}$ into 1?'

10 1 Total 11: remainder 4.

Reckon with 15 to find 4.

1	15
$\frac{1}{10}$	$1\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}$	3
$\frac{1}{15}$	1

Total 4 : then $\frac{1}{5} + \frac{1}{15}$ is what must be added

Therefore $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15}$ is complete up to 1."

10 3 1 1

Division of 33 by $1 \frac{2}{3} \frac{7}{10}$. Problem 31 of the Papyrus Rhind

1. Reproduction of the papyrus (from Chace et al. Papyrus Rhind; the line numbers were added by the editors)

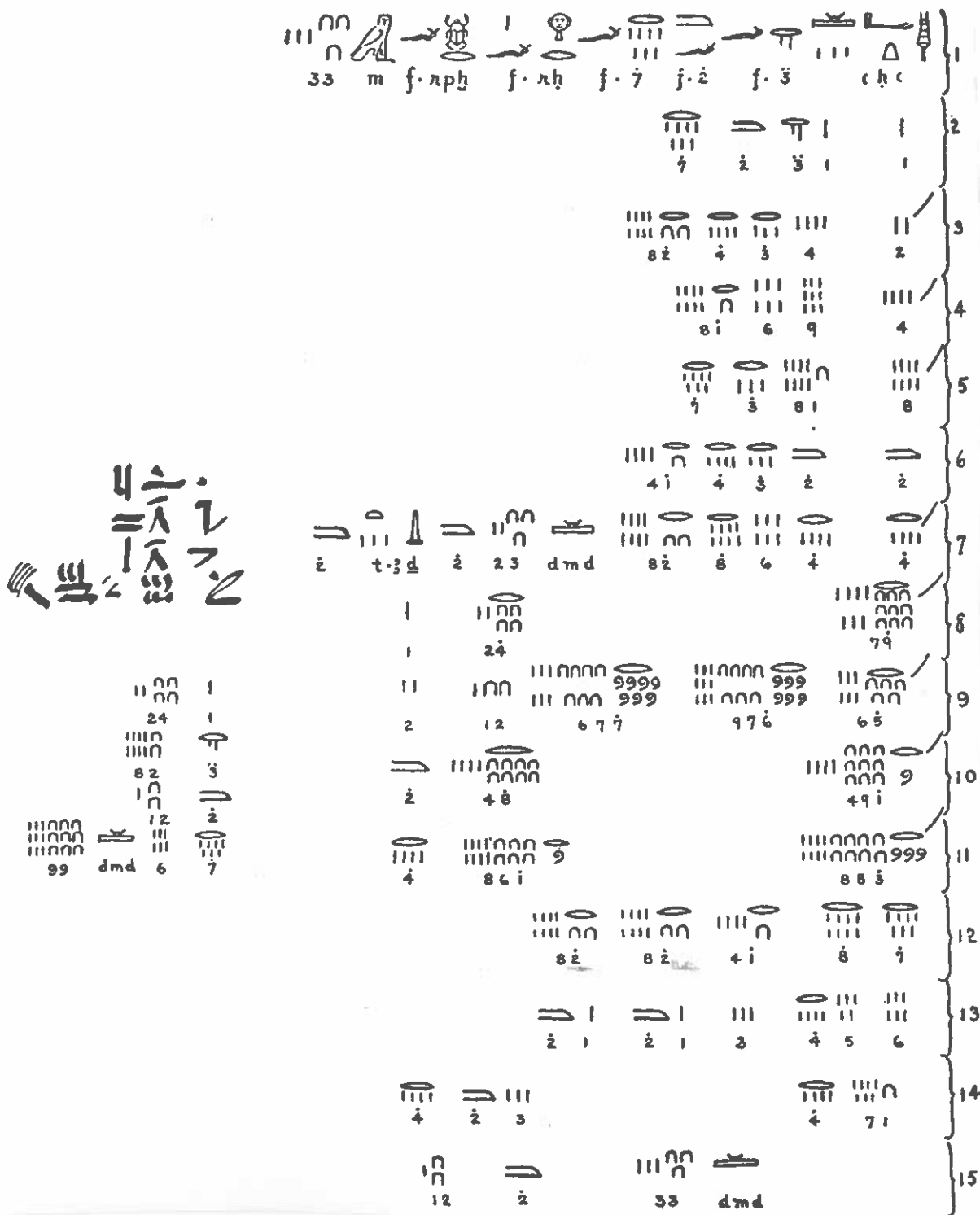
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

2. Transcription in hieroglyphs (added by the editors). Also from Chace et. al. Papyrus Rhind

The group of hieratic symbols on the left is misplaced in the papyrus, and put in the proper place by the editors.

(Remember that the papyrus is a copy of an older text!)

The editors also added the transcriptions of the hieroglyphs in the Roman alphabet and the Hindu-Arabic numbers.



(HM 83 9) HM 84 10

3. Translation of problem 31 by Peet (p. 66). Numbers in italic are red numbers in the manuscript.

No. 31. No. 31. (Pl. J.)

"A quantity to which its two-thirds, its half and its seventh are added becomes 33.

1	$1\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}$	
2	$4\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	$+ \frac{1}{28}$
4	$9\frac{1}{6}$	$+ \frac{1}{18}$ (read $\frac{1}{14}$)
8	$18\frac{1}{3}$	$+ \frac{1}{7}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$	$+ \frac{1}{8} + \frac{1}{28}$
Total $32\frac{1}{2}$		
Remainder $\frac{1}{2}$		

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28}$$

$$6 \quad 5\frac{1}{2} \quad 3 \quad 1\frac{1}{2} \quad 1\frac{1}{2}$$

$$17\frac{1}{4}$$

(Remainder) $3\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
(since) $\frac{1}{2}$ is 21.

1	42
$\frac{2}{3}$	28
$\frac{1}{2}$	21
$\frac{1}{7}$	6
Total 99 (read 97).	

$\frac{1}{97}$	$\frac{1}{42}$	1
$\frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$	$\frac{1}{21}$	2
$\frac{1}{194}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{388}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{4}$
Total 33."		

Q: Check the numbers in the translation with the numbers in the transcription in hieroglyphs (no. 2). Is the order of the text the same?