

Vijf columns over de geschiedenis van het getal
voor het Teleac programma “Faros”
voorjaar 1996
door Henk J.M. Bos

Column 1: Oude getallen

Het schijnt dat 29 het getal is waarvan we de oudste aantekening kennen. Die aantekening is er in de vorm van een bot van een baviaan, waarop 29 kerven zijn gekrast. Het bot is in Zuidelijk Afrika gevonden en het is zo'n 35 000 jaar oud. Voordat het baviaan-bot bekend werd was niet 29 maar 55 het oudste getal. In Moravië, een landstreek in Tsjechië, is namelijk een wolfsbot gevonden met 55 kerven; dat bot is zo'n 30 000 jaar oud.

Waarom 29 en 55? Het getal 29 is wel suggestief: een maancyclus, de tijd tussen de ene volle maan en de volgende, is $29\frac{1}{2}$ dag. Het baviaanbot zou dus gebruikt kunnen zijn om dagen te turven. De 55 is niet meteen zo suggestief. Maar twee van de kerven op het Moravische wolfsbot zijn wat langer dan de andere. Die lange kerven verdelen de reeks in een groep van 25 en een van 30, en 30 zou, net als 29, kunnen duiden op een maancyclus.

Dan is er ook het Ishango bot. Dat is jonger, het is van een 10 000 jaar geleden. Het is gevonden bij het dorp Ishango aan het Edward-meer in Zaire in Midden Afrika. Op het bot zijn kerven aangebracht. Die kerven staan in groepen van verschillende aantallen. De groepen staan in drie rijen. In de ene rij zijn er vier groepen van opeenvolgend 11, 13, 17, en 19 kerven. De volgende rij heeft vier groepen van 11, 21, 19, en 9 kerven. De laatste rij heeft 8 groepen van 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5, en 7 kerven. Die getallen zijn natuurlijk heel intrigerend: wat zit daar achter? Het bot is gevonden door Jean de Heinzelin. Hij merkte op dat de eerste reeks, 11, 13, 17, en 19, precies alle priemgetallen tussen 10 en 20 geeft. Priemgetallen zijn getallen die niet door andere getallen deelbaar zijn.

Hoe zit het met de tweede reeks? Die reeks was: 11, 21, 19, en 9. Dat zijn niet allemaal priemgetallen. Maar, zegt de Heinzelin, die vier getallen uit de tweede rij hebben wel wat met tien en twintig te maken: 11 is $10 + 1$, 21 is $20 + 1$, 19 is $20 - 1$ en 9 is $10 - 1$. Het wordt spannend!

Wat kunnen we aan met de derde reeks? Die was: 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5, 7. Niet alleen maar priemgetallen, ook geen speciaal verband met 10 of 20. Maar wel iets anders: 3, 6, dat is verdubbelen; 4, 8, da's ook verdubbelen; 10, 5 is halveren; dan weer een 5 — wel 10 is ook 5 en 5... En de 7 aan het eind van de reeks? Die past niet zo goed maar dat neemt niet weg dat er in de reeks veel verdubbeld en gehalveerd wordt.

Wat zegt zo'n bot nou over getallen van heel lang geleden? De Heinzelin

concludeert: Degene die deze kerven op het bot kerfde, 10 000 jaar geleden, was vertrouwd met getallen, gebruikte een tientallig stelsel, onderkende verdubbelen als iets wat je met getallen kunt doen en wist van priemgetallen.

Veel historici vinden dat die conclusies te ver gaan. Er zijn ook andere verklaringen mogelijk, bijvoorbeeld die van Alexander Marshack. Marshack gebruikte een andere clue die verborgen zit in de getallen op het Ishango bot: De eerste twee reeksen bestaan beide uit totaal 60 kerven, dus vrijwel twee maancycli; de getallen zouden te maken kunnen hebben met het bijhouden van een maankalender.

Marshack's vondsten ontmoeten ook nogal wat reserve. Zelf weet ik eerlijk gezegd ook niet goed hoeveel ik ervan geloven moet. Er zit wel veel onzekerheid vast aan het redeneren dat begint met een paar botten en eindigt bij het denken van mensen van heel lang geleden.

Maar het is wel spannend en uitdagend om met De Heinzelin en Marshack mee te denken, en om je voor te stellen hoe mensen heel vroeger met getallen omgingen. Daarom wilde ik de columns over de geschiedenis van het getal beginnen met deze oude getallen op botten.

Ik had nog een reden om met deze oude opgegraven getallen te beginnen. Hun verhaal illustreert namelijk de vijf elementen die steeds terugkeren als we historisch over getallen denken. Namelijk: de mensen van toen, de mensen van nu, de getallen zelf, het hanteren van de getallen en het gebruik ervan.

Er was iemand in Ishango die, lang geleden, kerven kraste op een bot. Die iemand staat voor de mens van toen, die met getallen te maken kreeg. Wij willen de reactie van die mens van toen mee-denken.

Er waren ook de Heinzelin en Marshack, historici, mensen van nu, die proberen te reconstrueren hoe mensen vroeger over getallen dachten. En mensen van nu nemen daarbij altijd hun eigen ideeën mee, over het belang van priemgetallen bijvoorbeeld, of van de maancyclus.

Dan: de priemgetallen die De Heinzelin zo opvielen. Die staan voor de getallen zelf, hun eigenschappen en hun onderlinge relaties (zoals deelbaarheid). De afzonderlijke getallen hebben als het ware een eigen persoonlijkheid, en mensen van toen hebben daarop gereageerd, en mensen van nu doen dat nog.

De tientalligheid op het Ishangobot. Dat is de meer operationele kant van het omgaan met getallen: hun naamgeving, de manier van getallen opschrijven,

kortom het in de hand houden en beheersen van de getallen.

En tenslotte de maancyclus van $29\frac{1}{2}$ dag. Die representeert het gebruik van de getallen, de reden waarom mensen er toe komen met getallen te werken, al was het alleen in de vorm van reeksen kerven op botten.

De mensen van vroeger die met getallen bezig waren, de mensen van nu die de mensen van vroeger willen begrijpen, de eigen aard van de getallen, de manier om ze te noemen en te noteren, en hun gebruik. Die vijf elementen zullen we in de komende columns over de geschiedenis van het getal steeds weer tegenkomen.

Column 2: Romeinse breuken

Vandaag iets over breuken. Breuken heb je nodig als er gerekend moet worden over delen en verdelen. Het is verbazend op hoeveel verschillende manieren de mensen in de loop van de geschiedenis hebben gerekend over verdelen. Teveel om op te noemen, ik pak er dus maar een: breuken bij de Romeinen.

De Romeinen hadden Romeinse cijfers om getallen op te schrijven. Dat was een tientallig systeem. Wij gebruiken het nog steeds als we getallen mooi en anders dan gewoon willen opschrijven, bijvoorbeeld als we paragrafen in een boek deftig willen nummeren. Voor rekenen zijn Romeinse cijfers niet geschikt; als Romeinen rekenden deden ze het met een rekenbord — vergelijkbaar met een telraam. Hoe rekenden ze met breuken? En hoe schreven ze breuken op? Met een breukstreep en Romeinse cijfers er boven en er onder? Dat deden ze niet. Ze gebruikten bij breuken zelfs geen tientallig stelsel maar een twaalftallig stelsel. In feite zou je kunnen zeggen dat ze helemaal geen breuken gebruikten. Raadsels genoeg — laat ik wat precieser zijn.

De Romeinen kenden een speciaal systeem waar vaak gedeeld en verdeeld moest worden, namelijk geld. De belangrijkste Romeinse munt was de *as*. Die *as* was verdeeld in 12-en. Zo'n twaalfde deel heette een *uncia* — daaraan hebben wij het woord "ons" overgehouden. Voor alle aantallen uncia's (unciae met ik eigenlijk zeggen) waren speciale woorden ingeburgerd — net zoals wij "kwartje" gebruiken voor 25 cent en "stuiver" voor 5. De Romeinen gebruikten nu die termen niet allen bij geld, maar ook in veel andere gevallen waar gedeeld werd en waar wij breuken zouden gebruiken.

Eerst wat meer over die termen. Ik zeg dan maar "ons" in plaats van "uncia" en ik zal voor de andere termen ook Nederlandse vertalingen gebruiken.

Ik begin met de makkelijke. Twee ons was een-zesde deel van de *as* en heette "sextans" in het Latijn, dat betekent "zesde". Drie ons was een-vierde deel van een *as*, een heette "quadrans", kwart. Vier ons was een derde deel, "triens", en zes ons was een half, in het latijn "semis".

Zesde, vierde, derde en half liggen wel voor de hand. Maar de andere? Die kun je niet zo makkelijk uitdrukken. Vijf ons bijvoorbeeld, dus $5/12$ e deel. Die heette "quincunx", dus letterlijk "vijf ons". $7/12$ e heette "septunx", dus "zeven ons". "Quincunx" wordt in het Engels nog gebruikt voor een vijf op een dobbelsteen: vier punten in de hoeken en een in het midden. Eigenlijk zijn quincunx en septunx dus helemaal geen breuken, zoals zesde, kwart en

derde. Het zijn hele getallen, 5 en 7, met de aanduiding erbij dat het om onzen, dus 12e delen, gaat. Daarom zei ik zo-net dat je zou kunnen zeggen dat de Romeinen eigenlijk niet met breuken, maar met een apart soort getallen werkten.

Er zijn nog een paar breuken in het systeem die we nog niet gehad hebben: $8/12e$, $9/12e$, $10/12e$ en $11/12e$.

$8/12e$, dus 8 ons, had de latijnse naam "bes", wat met "twee" te maken heeft. Het betekende "twee delen", en daar zat achter dat als je het over "twee delen" had, het duidelijk was dat er dan nog één deel over was. Dus twee-derde, en dat is ook $8/12e$.

Bij de laatste drie breuken werd "terug-geteld". $9/12e$ heette "dodrans" van "de-quadrans", "een kwart er af". Een kwart eraf, dus drie kwart over, dus inderdaad $9/12e$. $10/12e$ heette "dextans", letterlijk "een zesde eraf". En tenslotte $11/12e$ was "deunx", "een ons eraf".

Ik geef nog even het hele rijtje $1/12e$, $2/12e$ enz.: Ons, zesde, kwart, derde, vijftens, half, zevenons, tweedeel, kwarteraf, zesderaf, onseraf, hele. Dat was dus eigenlijk de tafel van $1/12$ in de Romeinse breuk-rekening.

Voor heel kleine breuken had men nog een paar extra termen, maar dat was dan ook genoeg. In de praktijk voldeed dat systeem heel goed. Maar je moest het wel leren. En dat gebeurde ook, op school. En daar hebben we een bericht van over.

Horatius, de beroemde Romeinse dichter die in de laatste eeuw voor Christus leefde, laat ons in een gedicht meeluisteren in een schoolklas. De meester overhoort een leerling, de zoon van Albinus, we zullen hem maar even "De Wit" noemen. "Nu jij, De Wit, als je een ons van vijftens aftrekt wat blijft er dan over? — Dat had je nou toch wel mogen weten —" "Derde!" (zegt de Wit, en dat klopt want vijftens min een ons is vier ons en dus een derde). "Goed zo! Jij wordt nog eens een goede zakenman! En als je die vijftens en ons bij elkaar neemt?" "Een half!"

En zo hebben we mensen van toen, van zo'n 2000 jaar geleden, bijna kunnen horen praten. En dan levert de geschiedenis van breuken dezelfde ervaring als zo vaak bij geschiedenis: anders en toch vertrouwd. Het rekenen met breuken was heel anders, maar die schoolklas, die is me toch wel heel vertrouwd.

Ik mag eigenlijk graag nog wat verder fantaseren over die schoolklas. Bijvoorbeeld hoe dan de tafels van vermenigvuldiging zouden klinken. Wij luisteren nog een keer mee, zo'n twee-duizend jaar geleden. De klas leert de tafel van vijf bij breuk-rekenen. Dus 5 keer een twaalfde, vijf keer $2/12$ e etc. Ze dreunen het op:

Vijf keer ons is vijffons;
vijf keer zesde in zesderaf;
vijf keer kwart is een en kwart;
vijf keer derde is een en tweedeel;
vijf keer vijffons is twee en ons;
vijf keer half is twee en half;
vijf keer zevenons is twee en onseraf;
vijf keer tweedeel is drie en derde;
vijf keer kwarteraf is drie en kwarteraf;
vijf keer zesderaf is vier en zesde;
vijf keer onseraf is vier en zevenons;
en vijf keer een is vijf.

Column 3: Decimale breuken

Vandaag gaat het over decimale breuken. Decimale getallen zijn geschreven getallen waarbij ergens tussen de cijfers een komma staat. Die komma betekent dat het stuk er achter eigenlijk een breuk is, een *decimale breuk*. Als we lezen 12-komma-7 weten we dat met de 7 achter de komma 7-tiende bedoeld wordt; 12-komma-7 betekent dus 12-en-7-tiende. Het woord decimaal komt van het Latijnse decem, wat tien betekent. Als er 12-komma-372 staat betekent het 12-en-372-duizendsten.

Bij rekenmachines en computers staat er overigens vaak een punt in plaats van een komma, maar ik zal het nu maar op de komma houden.

Door de afspraak over vóór- en achter de komma hebben we voor iedere gewenste precisie de geschikte getallen bij de hand. De meeste maatsystemen zijn tegenwoordig aan het gebruik van decimale getallen aangepast. Wij zouden een maat niet in 12 delen verdelen. Vroeger, bij de Roeden, Voeten en Duimen, gebeurde dat wel. Wij verdelen de maten in 10, of 100, of 1000; kortom, we splitsen de eenheden decimaal.

Rekenen met decimale breuken is makkelijk, makkelijker dan het rekenen met gewone breuken. Hoe is men op dat idee gekomen?

Als we die vraag vervolgen komen we een persoon tegen met een heel speciale charme, vooral voor een Nederlands publiek: Simon Stevin (of Stévin - het is niet zeker hoe de klemtoon moet liggen). Simon Stevin liet in 1685 in Leiden, bij de drukkerij van Plantijn, een boekje verschijnen met de titel:

De Thiende, leerende door onghehoorte lichtigheyt allen rekeningen onder de Menschen noodig vallende, afveerdighen door heele ghetalen sonder ghebrokenen

Stevin was toen 37 jaar oud, hij was in Brugge geboren, had als boekhouder gewerkt, had door Europa gereisd, was naar Delft verhuisd en stond aan het begin van een carrière als raadgevend ingenieur, uitvinder, wetenschappelijk en technisch raadsman van Prins Maurits en schrijver van natuurwetenschappelijke en wiskundige werken. Het was een roerige tijd. De 80-jarige oorlog was al 17 jaar aan de gang. Aan de grenzen van de jonge Republiek werd constant gevochten. Maar handel en ondernemingslust bloeiden. Ondernemingslust betekende rekenen en daar speelde Stevin op in. Zijn boek begint zo:

Den Sterrekyckers, Landtmeters, Tapijtmeters, Wijnmeters, Li-
chaemmers int ghemeene, Muntmeesters, ende allen Cooplie-
den, wenscht Simon Stevin Gheluck.

Na deze begroeting herinnert hij de genoemde ondernemers eraan hoe vaak
ze moeten rekenen. Hij noemt de "lastige Deelingen" en

... de verdrietighe Menichvuldigingen dieder spruyten, uyt de
Roeden, Voeten, ende dickmael Duymen onder malcanderen, welcke
niet alleen moeyelick en sijn, maer (hoe wel nochtans het meten
ende dander voorgaende recht gedaen sijn) dickmael oirsaeck van
dwalinghe, streckende tot groote schade van desen of dien, oock
tot verderfenis van de goede Mare des Meters ...

Vervolgens legt hij heel duidelijk het principe van decimale getallen uit en
hij laat zien dat je er mee rekent als met gewone getallen, zodat je inderdaad
de lastige breuken vermijdt.

Stevin liet in het zelfde jaar ook een Franse versie van het boekje verschijnen.
Er kwam wat later een Engelse vertaling; maar het duurde lang voordat deci-
male getallen algemeen aanvaard waren. De manier van opschrijven had ook
een lange en ingewikkelde geschiedenis. Stevin zelf gebruikte geen komma of
punt. Hij gaf met aparte cijfers in cirkeltjes aan waar de eenheden stonden.
Dat was niet echt handig en het vond weinig navolging. Uiteindelijk is het
gebruik van decimale getallen en breuken vooral aanvaard door de invoering
van decimale maat- en geldstelsels, met meters en centimeters in plaats van
de voeten, roeden en duymen die de "verdrietighe Menichvuldigingen" ver-
oorzaakten. In zijn boekje had Stevin al nadrukkelijk voor die hervorming
van het maatstelsel gepleit.

Mogen we nu zeggen dat Stevin de decimale breuken heeft uitgevonden? Ik
zou dat graag doen, want ik vind hem een sympathieke figuur in de geschiede-
nis van het getal. Maar ik moet wel een paar slagen om de arm houden. Een
Chinese geleerde heeft al meer dan duizend jaar vóór Stevin het idee van deci-
male breuken geformuleerd. In de Arabisch-Islamitische wetenschappelijke
cultuur zijn er ook schrijvers geweest die de voordelen van decimale breuken
hebben onderkend. In Europa had Stevin een paar voorlopers die het idee
hadden gezien.

Aan de andere kant, die eerdere ideeën hebben niet tot uitgebreide toepassing

geleid. Stevin was de eerste die het idee uitvoerig en met verve uitlegde. Hij begreep ook de noodzaak om de maatsystemen aan te passen. En hij richtte zich rechtstreeks tot de gebruikers in hun eigen taal. Hij koos heel bewust voor Nederlands als wetenschappelijke taal en daar hebben we mooie, levendige stukken wiskundig proza aan overgehouden. Kortom: hij zag dat het bij wiskundige vernieuwingen niet alleen om ideeën gaat, maar ook om de uitwerking ervan, en om wat tegenwoordig 'marketing' heet. Dat zijn zulke belangrijke dingen dat ik zonder aarzelen Simon Stevin het eerste noem als het om de geschiedenis van de decimale breuken gaat.

Column 4: Getallen en het continuüm

Vandaag gaat het over de vraag hoeveel getallen er eigenlijk zijn. Dat is een moeilijke vraag. Niet omdat je er lang voor moet rekenen of er grote computers voor nodig hebt, maar omdat je je dan moet afvragen: Wat zijn getallen eigenlijk? Op die vraag hebben we geen antwoord. En, eerlijk gezegd, ik denk ook niet dat dat antwoord ooit gevonden zal worden.

Is het echt niet bekend wat getallen zijn? Getallen, die kent toch iedereen? Ik moet het misschien ook wat minder dramatisch formuleren. Laat ik het zo zeggen: wiskundigen zijn het er niet over eens wat getallen zijn, of getallen eigenlijk wel bestaan, en, als ze bestaan, *hoe* of *waar* ze dan bestaan. Maar wiskundigen zijn het wel eens over de manier waarop je deze vraag kunt omzeilen en toch goed en veilig met getallen kunt werken.

Mijn verhaal begint bij Pythagoras en zijn volgelingen in de zesde en vijfde eeuw voor Christus. Zij vroegen zich af:

1. Zijn er wel genoeg getallen?
2. Als je alle getallen op een rij zet krijg je dan een lijn?

Hoe kwamen ze op die vragen? De Pythagoreeërs hadden een grote interesse in getallen, maar ook in meetkunde. Zij vroegen zich af wat er gebeurt als je getallen gebruikt om in de meetkunde te *meten*. Meten in de meetkunde is vragen "hoe lang?". En het antwoord is bijvoorbeeld: "7 centimeter". (De Grieken gebruikten natuurlijk geen centimeters maar ik doe dat nu maar wel.) Het antwoord, 7 centimeter, bestaat dus uit een getal (7) en een maat (de centimeter). Je gaat er van uit dat het bekend is hoe lang een centimeter is en je zegt: de afstand die ik meet is 7 keer zo lang als de bekende centimeter. Om alle mogelijke afstanden te meten moet je veel getallen ter beschikking hebben. Aan de gewone, gehele getallen, 1, 2, 3, enzovoort, heb je niet genoeg; daarmee kun je geen afstanden kleiner dan een centimeter meten. Ook kun je daarmee niet een afstand meten die, bijvoorbeeld, tussen de drie en de vier centimeter ligt. Nou zou je dat kunnen doen met een kleinere maat dan de centimeter, maar dat verplaatst het probleem alleen maar. Dus we hebben meer dan de gewone getallen nodig. We kunnen de breuken er bij doen. Breuken zoals $1/3$, of $21/70$ of in het algemeen: een geheel getal gedeeld door een ander geheel getal. Op het eerste gezicht lijkt dat de oplossing te geven. Zo'n afstand tussen drie en vier centimeter, zou

bijvoorbeeld 3 en $1/3$ centimeter kunnen zijn, of 3 en $21/70$ centimeter. En we kunnen met honderdsten, duizendsten, enzovoort ook willekeurig kleine afstanden meten.

Hebben we nu, met de breuken erbij, genoeg getallen om te meten? In de vijfde eeuw vóór Christus heeft een volgeling van Pythagoras ingezien, en ook *bewezen*, dat er voor dat doel *niet* genoeg getallen en breuken zijn. We weten niet wie, we weten ook niet precies hoe. We weten wel dat korte tijd later Griekse wiskundigen voorbeelden kenden van afstanden die niet met getallen of breuken te meten zijn. Het beroemdste voorbeeld was dit: bekijk een vierkant van 1 centimeter lang en 1 centimeter breed. Dan is de diagonaal van dat vierkant niet met een getal of breuk te meten.

Dat is eigenlijk een zo vreemd resultaat dat we er even bij stil moeten staan. Stelt U zich een rechte lijn voor, en daarop een stuk van, zeg, 10 centimeter lang. Alle punten op dat stuk hebben een afstand tot het begin van het stuk, en die afstand is steeds kleiner dan 10 centimeter. Op dat stuk liggen dus alle mogelijke afstanden tussen de 0 en de 10 centimeter. Leg er nu alle getallen en breuken tussen 0 en 10 langs. Dat zijn er oneindig veel. Ze liggen ook oneindig dicht bij elkaar, want zoals ik tussen 3 en 4 3 -en-een-half kan leggen zo kan ik tussen ieder tweetal getallen of breuken een tussen-getal leggen. En *toch* zijn er minder getallen dan afstanden langs de lijn.

Die lijn, waarlangs we alle afstanden konden leggen, is dus essentieel iets anders dan het geheel van alle getallen samen. We hebben er ook een apart woord voor, namelijk: 'continuüm'. Langs het continuüm kun je je een geleidelijke, continue beweging voorstellen; het continuüm hangt samen zoals een lijn samenhangt. Wat de Pythagoreeërs dus ontdekten was dat de getallen 1, 2, 3, enzovoort, samen met breuken van de vorm getal-gedeeld-door-getal, niet genoeg waren om het continuüm te beschrijven.

De Griekse wiskundigen hebben sindsdien getallen en het continuüm strikt gescheiden gehouden. Dat doen we nu niet meer. Er zijn in de tussentijd nieuwe getallen bijgemaakt, het getalbegrip van de Grieken is uitgebreid. Dat heeft heel lang geduurd. Eigenlijk is het pas zo'n 125 jaar geleden dat wiskundigen er in slaagden die uitbreiding zó op te zetten dat men kon zeggen: nu hebben we getallen waarmee we het continuüm adequaat kunnen beschrijven. Het nieuw systeem van getallen wordt meestal genoemd: de reële getallen. Men noemt ze ook wel: 'Cantor's continuüm'. De Duitse wis-

kundige Georg Cantor was namelijk een van de mensen die, rond 1870, dat systeem ontwikkelden. Ik ga er nu niet op in hoe dat systeem in elkaar zit.

Wel nog dit: De onderneming van het aanpassen van getallen aan het continuüm heeft grote gevolgen gehad voor de wiskunde. Ik noem er drie: 1. De wiskundigen leerden met het oneindig omgaan. 2. Ze werden gedwongen de logica van het wiskundig redeneren heel zorgvuldig op te zetten. 3. Ze werden gedwongen zich af te vragen wat getallen eigenlijk zijn. En op die laatste vraag kwam, zoals ik al zei, nooit een echt eenduidig antwoord.

De confrontatie van de getallen met het continuüm is een van de diepste problemen van de wiskunde. Ik wilde er daarom in deze columns niet aan voorbij gaan. Maar misschien duizelt het U nu wel, zoals het velen vroeger ook geduizeld heeft. Niet erg, want die duizeling over getallen, en hun oneindigheid, is ook belangrijk. Bij getal hoort begrijpen, maar ook verwonderen en zelfs duizelen.

Column 5: Getallen met betekenis

In het Evangelie van Johannes, hoofdstuk 21 vers 11 wordt verteld hoe Jezus aan zijn discipelen verscheen terwijl die aan het vissen waren. Ze hadden nog niets gevangen, maar wierpen nu op Jezus' aanwijzing het net nog eens uit en vingen 153 grote vissen. Honderd-drie-en-vijftig. Dat getal is niet onopgemerkt gebleven. Waarom 153? Al heel vroeg in de geschiedenis van de Bijbeluitleg hebben mensen gemeend dat er meer achter dat getal moest zitten dan een simpel bericht over een aantal vissen in een net. En wat blijkt? 153 is een merkwaardig getal. Als je 1, plus 2, plus 3, plus enzovoort, tot en met 17 bij elkaar optelt krijg je 153. Als je die 1, 2, 3 enzovoort als rijtjes stippen onder elkaar zet krijg je een driehoekig patroon van stippen met drie randen van zeventien stippen. Totaal 153, en daarom heet 153 ook wel een driehoeksgetal. Om precies te zijn, het is het zeventiende driehoeksgetal. 153 heeft dus te maken met 17. Wel, 17 is 10 plus 7. 10 en 7 hebben in de Christelijke symboliek betekenis: 7 is het getal van de genade, 10 het getal van de wet.

We kunnen het getal 153 nog anders ontleden, het is namelijk ook 9 maal 17 (wéér 17), en 9 is drie maal drie, en drie staat voor de Drieëenheid. (En de drie zat ook al in de driehoeksvorm.) En zo kan men het aantal vissen lezen als gecombineerd symbool voor de Drieëenheid, de genade en de wet — en velen hebben het zo ook willen lezen.

Getalsymboliek, of getalmystiek, kwam niet alleen binnen de Christelijke cultuur voor. Deze manier van denken over getallen bestond al ver voor onze jaartelling. Hij komt in bijna alle culturen voor.

Als een getal symbolisch wordt begrepen dan wordt er een betekenis aan gehecht. En die betekenis kan het getal ook weer kwijt raken, namelijk als mensen niet meer in de symboliek geloven of er niet meer van weten. Ik vind dat proces van betekenis krijgen en weer verliezen heel fascinerend. Het is ook een proces dat makkelijk wordt vergeten, vooral als het om betekenissen gaat waar wij nu niet meer zo van overtuigd zijn. Maar in de geschiedenis van de getallen is het wel van belang geweest en daarom wil ik er in deze laatste column iets over zeggen.

Wat gebeurt er als zo'n getal als 153 een symbolische betekenis krijgt? Dan speelt er een idee op de achtergrond, namelijk het idee dat getallen invloed hebben op het wezen van de dingen die ze tellen. Waren het 200 vissen geweest (in het verhaal of in het echte net) dan was de boodschap, de

betekenis van de vissen anders — of misschien was er dan wel helemaal geen betekenis. Er speelt nog een idee op de achtergrond: namelijk dat je achter die betekenis kunt komen door het getal als het ware te ontleden: 153 is een driehoeksgetal, het is 9 keer 17; 17 is $7 + 10$ en op de zelfde manier is de betekenis van het getal opgebouwd uit Drieëenheid, genade en wet. We gaan nog een stap verder in het achterhalen wat er bij deze symbolische duiding van getallen meespeelt. Het getal draagt een betekenis of een boodschap; maar die betekenis is *bedoeld*, de boodschap wordt *gegeven*. Door wat of door wie? Door hogere machten, goden of een God. Kort gezegd, bij getalsymboliek wordt het getal gezien als medium van goddelijke boodschappen.

Dat is nogal wat. Zulke ideeën staan in onze tijd ver van ons af. Ze staan zeker ver van de wiskunde zoals die nu onderwezen en onderzocht wordt. Maar in de ontwikkeling van de wiskunde zijn die ideeën erg belangrijk geweest. Ik noem twee voorbeelden.

Pythagoras en zijn volgelingen in de 6e en 5e eeuw voor Christus waren gefixeerd op getallen. Ze stelden bijvoorbeeld theorieën op over deelbaarheid en priemgetallen. Ze deden dat uit de overtuiging dat getallen betekenis hadden en dat deelbaarheid een van de sleutels was tot het doorgronden van die betekenis. Die theorieën waren het begin van de Griekse wiskunde met een nadruk op precies definiëren en bewijzen. Die stijl van exact redeneren is eigenlijk bijna onveranderd tot nu toe in de wiskunde gebleven — hoewel de achtergrond van getal-symboliek allang verdwenen is.

Het tweede voorbeeld: Het Middeleeuwse onderwijs aan kloosterscholen en universiteiten. In de leerstof van toen waren getallen heel belangrijk. De eerste van de zeven vrije kunsten die onderwezen werd was de Arithmetica, de leer van de getallen en hun verhoudingen. In een van de meest gebruikte leerboeken, geschreven rond het jaar 500 door Boethius, lezen we het volgende over getallen:

Getal was het belangrijkste beginsel in de geest van de Schepper.
Uit getal werd het veelvoud van de vier elementen afgeleid, evenals de beweging der sterren en de omwentelingen der hemelen.

Boethius had niet zoveel aandacht voor getalsymboliek zoals bij het getal 153. Maar hij was overtuigd dat schoonheid, en geestelijke harmonie gebaseerd zijn op getal-relaties. Voor Boethius had de arithmetica een ethische opdracht: God was bij de schepping uitgegaan van getallen. Daarom kon

men door studie en contemplatie van getallen de bedoeling, de betekenis van de schepping achterhalen en zijn leven daarnaar inrichten.

Er zijn veel meer voorbeelden te geven. Tot en met de periode van de Renaissance was het eigenlijk voor velen heel vanzelfsprekend dat getallen betekenis hadden. Wat die betekenis was, daarover was men het natuurlijk lang niet eens. En waar men het inzicht voor gebruikte kon ook ver uiteenlopen; van serieuze mystieke contemplatie tot regelrechte oplichting.

Getallen beladen met betekenis — dat idee lijkt verdwenen of in elk geval sterk op de achtergrond geraakt. Het is moeilijk om je te verplaatsen in een gedachtenwereld waarin dat idee vanzelfsprekend was. Maar dat is juist de uitdaging van geschiedenis, dat verplaatsen in vroegere gedachtenwerelden. Ik vind dat altijd heel spannend.

Een van de spannende dingen is dat je je natuurlijk toch gaat afvragen of die gedachtenwerelden echt zoveel anders zijn dan die van nu. In ons geval vraag je dan: Is het werkelijk zo dat getallen tegenwoordig niet meer met betekenis beladen zijn? Waarom willen mensen bijvoorbeeld niet “op hun nummer gezet” worden? En al helemaal niet “alleen maar een nummer” zijn? Waarom ziet de examenuitslag “7” er zoveel precieser uit dan “ruim voldoende”, terwijl het toch hetzelfde betekent? En...

Maar de tijd voor de columns is nu op, en dit is ook niet meer geschiedenis, ik ga er dus niet op door — maar belangrijk zijn die vragen wel.