

**ELEMENTEN VAN DE WISKUNDE —
ZE ZIJN NIET MEER WAT ZE VROEGER WAREN**
Voordracht, gehouden tijdens het Wintersymposium over
"Elementen van de Wiskunde" georganiseerd door het
Wiskundig Genootschap op 8 januari 1983.

H.J.M. Bos

1. INLEIDING

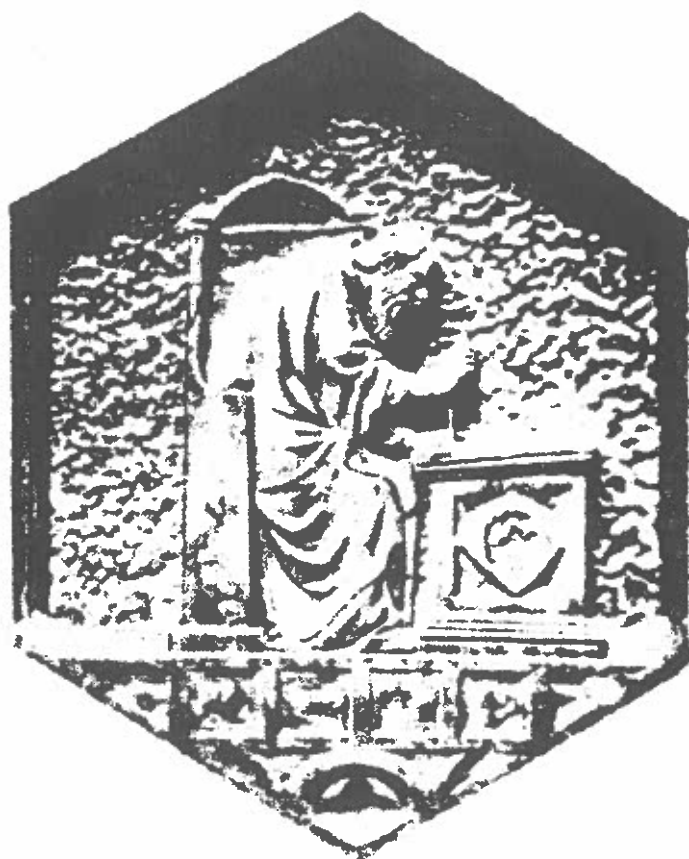
In het artikel dat het onderwerp voor dit symposium suggereerde,¹ stelt Halmos de vraag wat de elementen van de wiskunde zijn, analoog aan de elementen van de scheikunde. De voorzitter van het W.G. vraagt mij om daarover een voordracht te houden. Mijn eerste reactie, als historicus van de wiskunde, is: de wiskunde heeft dertien elementen, *Elt. I*, *Elt. II*, ..., *Elt. XIII*; de dertien boeken van Euclides' *Elementen*. Dat is echter niet wat Halmos bedoelde, dus aarzel ik, Maar de voorzitter zegt dat ik alle vrijheid heb, en zo ontstaat deze voordracht, waarin ik drie leerboeken van de wiskunde wil bespreken die alle drie het woord "Elementen" in hun titel hebben en die alle drie grote invloed hebben gehad of nog hebben.

Mijn doel daarbij is om te laten zien dat die leerboeken heel verschillende visies op wiskunde vertegenwoordigen. Zulke visies veranderen dus in de loop der tijden en dat zullen ze wel blijven doen. De visies die ik zal bespreken zijn ook zeker niet de enige die er geweest zijn maar het waren wel belangrijke en invloedrijke visies.

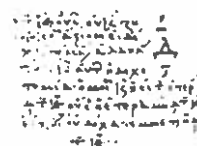
De drie leerboeken die ik ga bespreken zijn: Euclides' *Elementen*, geschreven ± 300 voor Christus, Christian von Wolff's *Elementa Mathematicae Universalis*, gepubliceerd rond 1730, en Nicolas Bourbaki's *Éléments de Mathématique*, verschijnend sinds 1939.

2. EUCLIDES' *ELEMENTEN*

Euclides (in Figuur I zijn portret, een fantasie natuurlijk, maar wel heel aansprekend) leefde omstreeks 300 voor Christus en werkte in Alexandrië, waar kort te voren een groot wetenschappelijk centrum was



Figuur I. Euclides.

[illegible]

De ses eerste Boeken EUCLIDIS, Van de beginfelen ende fundamenten der Geometrie.

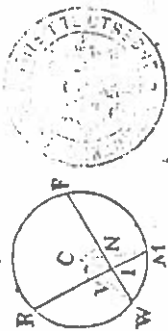
Waer by ghevoeght zijn eenighe nut-
tigheiden vint de selve Boeken ghetrocken. Reuse-
gaote de Apotten in Geometriele figuren / als
tmaeten / veranderen / vanden boeghjen / als
afstrecken / vermenigvuldigen /
ende deelen.

Overghele, verclaert, ende uygheluyt, tot vorder-
ringhe, ende oeffeninghe, van alle leergierighe
liefhebbers der selver vrye konste.

Door

IAN PIETERSZ: DOU, der Stadt
Leyden Lant-mettr ende Wijnroper.

Van nieuw overfien ende verbeter: Mitsgaders de by-
gevoegde nuttigheiden, met de specien in Geometrie-
le figuren breeder verclaert ende vermaent
dort, door den selven Antheer.



TOT ROTTERDAM,

By de Weduwe van Matthijs Bastiaensz,
Boeck-verkooper, Op't Steegh der In-
Zorgheus. Anno 1632.

Het eerste boeck Euclidis,

Van de beginfelen ende fundamenten
der Geometrie, tracterende van de gront der
rechtlinische figuren met hare linien, hoeken
en andere saken, mitgaders 't fondament van
de berecktinghe, veranderinghe ende deelinghe
der selven.

Definities, Datis:

Verklarings van eenighe namen der linien, fi-
guren, ende andere saken des se Boecks.

1. Een punt is een ondeelbaer stipken.
2. Een lini is een lenghte, sonder eenige
breecte.
3. 't Uytterste van de linien zijn punten.
4. Ede rechte linie is de kortste uyt-strec-
kinge van 't een punt tot het ander.
5. Superficie is dat alleen lenghte ende
breecte heeft.
6. 't Uytterste van de superficies zijn li-
nien.
7. Een effen superficie is die gelijk leyt
tusschen de linien.
8. Een effen hoek is zoo twee linien in
een effen plaats malkanderen in een
punt aenraken.
9. Recht-linichen hoek is ghemaect
van

PROPOSITION 47.

protasis

In right-angled triangles the square on the side subtending
the right angle is equal to the squares on the sides containing
the right angle.

ekthesis

Let ABC be a right-angled triangle having the angle
 BAC right;

diorismos

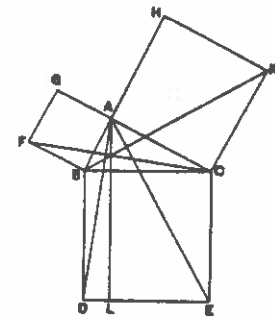
I say that the square on BC is equal to the squares on
 BA, AC .

kataskheue

For let there be described
on BC the square $BDEC$,
and on BA, AC the squares
 GB, HC ; [1. 46]
through A let AL be drawn
parallel to either BD or CE ,
and let AD, FC be joined.

apodeixis

Then, since each of the
angles BAC, BAG is right,
it follows that with a straight
line BA , and at the point A
on it, the two straight lines
 AC, AG not lying on the
same side make the adjacent
angles equal to two right
angles;



therefore CA is in a straight line with AG . [1. 14]

For the same reason

BA is also in a straight line with AH .

And, since the angle DBC is equal to the angle FBA : for
each is right:

let the angle ABC be added to each;

therefore the whole angle DBA is equal to the whole
angle FBC . [C. N. 1]

And, since DB is equal to BC , and FB to BA ,
the two sides AB, BD are equal to the two sides FB, BC
respectively,

and the angle ABD is equal to the angle FBC ;

therefore the base AD is equal to the base FC ,

and the triangle ABD is equal to the triangle FBC . [1. 4]
Now the parallelogram BL is double of the triangle ABD ,
for they have the same base BD and are in the same parallels
 BD, AL . [1. 41]

And the square GB is double of the triangle FBC ,
for they again have the same base FB and are in the same
parallels FB, GC . [1. 41]

[But the doubles of equals are equal to one another.]

Therefore the parallelogram BL is also equal to the
square GB .

Similarly, if AE, BK be joined,
the parallelogram CL can also be proved equal to the square
 HC ;

therefore the whole square $BDEC$ is equal to the two
squares GB, HC . [C. N. 2]

And the square $BDEC$ is described on BC ,
and the squares GB, HC on BA, AC .

Therefore the square on the side BC is equal to the
squares on the sides BA, AC .

symperasma

Therefore etc.

Q. E. D.

Figuur V. Elt. I - 47 uit Heath's editie van de Elementen.

Figuur IV. Euclides' Elementen, pagina's uit Dou's editie 1632.

"hence" etc.); en tenslotte de konklusie (symperasma) die bestaat uit een woordelijke herhaling van de uitspraak, voorafgegaan door "dus" en besloten met "hetgeen te bewijzen was" (Heath laat dit gedeelte weg). Met geringe wijzigingen en toevoegingen gebruikt Euclides steeds dit schema voor de bewijzen van de stellingen en de oplossingen van de problemen.

Met de stelling van Pythagoras zijn we aan het eind van het eerste boek der *Elementen* gekomen; in Figuur VI is een overzicht van het hele werk gegeven. Het blijkt dat in Euclides' visie de *Elementen* van de wiskunde omvatten: vlakke meetkunde, theorie van grootheden en verhoudingen, getaltheorie, theorie van irrationale verhoudingen, en stereometrie, in het bijzonder de stereometrie van de vijf regelmatige veelvlakken. Het overgrote deel van deze grondbeginselen der wiskunde was al vóór Euclides bekend; zijn bijdrage is vooral de ordening van de theorieën en de redactie ervan in de bovengeschetste strakke stijl. Het boek moet vrij snel eerder geschreven grondbeginselen van de markt verdrongen hebben en het heeft voor meer dan 2000 jaar het gezicht van de wiskunde bepaald; het meetkunde onderwijs is zelfs tot ver in de huidige eeuw essentieel Euclidisch van stijl gebleven.

Waarom nu deze keuze van *Elementen* der wiskunde bij Euclides? Euclides zelf geeft geen motivatie, hij valt met de deur in huis: "een punt is wat geen delen heeft"... en als we een veel verteld verhaal over hem mogen geloven, kon hij op vragen over het waarom knorrig reageren. Een leerling die na de eerste stelling vroeg "wat levert het me op dit te leren?", kreeg te horen: "geef hem maar wat geld want hij wil verdienen met wat hij leert!".⁴

3. PROCLUS

In de strakke stijl van de Griekse wiskunde past weinig uitleg van motivatie. Pas bij een veel latere schrijver, namelijk Proclus (ca. 410-485), vinden we expliciet een visie geformuleerd over het waarom van Euclides' *Elementen*. Het is zeker niet de enige visie die onder Griekse wiskundigen bestaan heeft; het is wel een belangrijke visie die, met name in de Renaissance en de 17e eeuw, grote invloed

EUCLIDES *Elementen*

Inhoudsoverzicht

Boeken I-VI: Vlakke meetkunde

- I: grondbegrippen, driehoeken, oppervlakte, stelling van Pythagoras
- II: "geometrische algebra"
- III: de cirkel
- IV: in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken
- V: grootheden en verhoudingen (inkl. irrationale)
- VI: verhouding van figuren, gelijkvormigheid

Boeken VII-IX: Getaltheorie

- VII: deelbaarheid, priemgetallen
- VIII: meetkundige rijen
- IX: meetkundige rijen, even en oneven. volmaakte getallen

Boek X: Speciale irrationale verhoudingen

Boeken XI-XIII: Stereometrie

- XI: elementaire stereometrie
- XII: pyramide, kegel, bol
- XIII: regelmatige veelvlakken

Figuur VI.

heeft gehad.

Proclus was een filosoof, een van de laatste in de antieke traditie. Hij was leider van de *Academie* in Athene, de filosofische school die door Plato meer dan 700 jaar te voren gesticht was en die kort na Proclus, in 529 door keizer Justinianus ontbonden zou worden. Proclus was een neo-Platonist, dat wil zeggen dat hij tot een filosofische stroming behoorde die Plato's filosofie combineerde met een interesse in (Egyptische, Griekse en algemeen Oosterse) religie en magie, en met een zeer precieze stijl van redeneren. Proclus paste daarin goed: hij was een diep religieus man en zeer helder en ge-disciplineerd denker.

Proclus schreef een kommentaar op het eerste boek van Euclides' *Elementen*. Hij legde daarin uit wat *Elementen* zijn: het zijn stellingen waarop andere stellingen worden gebaseerd, dit echter ruim genomen. Men kan dus zeggen: basisteorieën voor de wiskunde. Op de vraag waarom Euclides precies deze theorieën opnam in zijn *Elementen* geeft Proclus een speciaal antwoord: het is precies de stof die nodig is voor het begrip van de regelmatige veelvlakken, die dan ook het sluitstuk van het boek vormen. Die regelmatige veelvlakken (tetraëder, octoëder, kubus, dodekaëder, ikosaëder) zijn van groot belang in Plato's leer over de natuur en de elementen waaruit die natuur is gevormd; ze worden dan ook vaak de "Platonische lichamen" genoemd.

Proclus vermeldt overigens ook dat andere wiskundigen aan de rol van de regelmatige veelvlakken in Euclides' *Elementen* niet zo'n grote betekenis hechten, zij menen dat de stof gekozen is om een goede propaedeuse te vormen, ter voorbereiding op de hogere wiskunde, die ondermeer gaat over kegelsneden en infinitesimaalrekening.

Proclus gaat uitvoerig in op de vraag: Waarom wiskunde? Zijn antwoord is: wiskunde brengt de mens dicht bij hogere zijnsvormen en hogere kennisvormen. Die mening past in de (neo-) Platonische filosofie. Daarin worden namelijk verschillende zijnsvormen, en verschillende manieren waarop men die zijnsvormen kan kennen, onderscheiden. De hoogste zijnsvorm is die van de enkelvoudige onsamengestelde, ondeelbare, onveranderlijke en immateriële substantie. Hieronder vallen de "ideeën" en de "vormen"; het hoogste idee is dat van "het goede". De kennisvorm die daarbij hoort, dat wil zeggen de manier waarop men de

ideeën en vormen kan kennen, is het direkte kennen door de ziel. Men moet zich daarbij een bijna mystiek kennen, een schouwen door de ziel voorstellen. De filosoof en de gelovige streven naar deze kennisvorm, die overigens heel moeilijk te bereiken is. De laagste, of de gewone zijnsvorm is die van de materiële, deelbare, complexe en bewegende substantie die we aantreffen bij natuurlijke verschijnselen. De manier waarop we deze kunnen kennen wordt omschreven als opinie, vermoeden, geloof; er is dus geen zekerheid in deze kennisvorm.

Het belang van de wiskunde, nog steeds volgens Proclus, is nu dat de zijnsvorm der wiskundige dingen, en de kennis die de wiskundige daarvan heeft, tussenvormen tussen de beide genoemde uitersten zijn. De wiskundige substantie, dat waaruit wiskundige dingen (figuren, getallen) bestaan, is weliswaar complex, dus niet ondeelbaar, maar wel immaterieel en exact. De wiskundige kennis is weliswaar niet direkte kennis, maar wel meer dan louter vermoeden; het is begrijpen, beredeneerd verstaan. Proclus zegt het zo: de dingen die de wiskundige bestudeert zijn "in het voorportaal van de primaire vormen", en de studie van de wiskunde is dus voorbereidende oefening voor het kennen van de hoogste zijnsvorm.

Hier kan ik het best Proclus zelf aan het woord laten:

"Want de schoonheid en ordening van het wiskundig redeneren, en het blijvende en standvastige karakter van deze wetenschap brengen ons in contact met de kenbare wereld zelf, en plaatsen ons met zekerheid in de gemeenschap met dingen die altijd vast zijn, altijd stralend met goddelijke schoonheid en altijd in dezelfde onderlinge relaties."⁵

En:

"Wij moeten daarom vaststellen dat de wiskundige kennis, en het inzicht dat er het resultaat van is, verkiesbaar zijn om zichzelf, niet omdat zij voorzien in menselijke behoeften. Als wij het nut ervan moeten relateren aan iets wat er buiten ligt, dan moet dat zijn het intellectuele inzicht waartoe het bijdraagt. Want wiskunde leidt tot zulk inzicht en bereidt ons voor door het oog van de ziel te reinigen en de belemmeringen weg te nemen die de zintuigen vormen voor onze kennis van het geheel der dingen."⁶

Het nut van de wiskunde ligt dus, volgens Proclus, niet in de toepassingen. Hij weet natuurlijk wel dat er toepassingen zijn; hij vermeldt ook dat sommige mensen menen dat daar juist wel het nut van wiskunde ligt, maar voor hem ligt het belang van de wiskunde op spiritueel vlak. Het gaat hem daarbij overigens niet in eerste instantie over de inhoud van de wiskundige stellingen en theorieën, maar vooral om het redeneren zelf; hij spreekt van de "schoonheid en ordening van het wiskundig redeneren". Dat sluit overigens aan bij een heel bekende ervaring over wiskunde: wat je ervan bij blijft is niet zozeer wat je bewezen hebt, maar wel dat je iets bewezen hebt.

Toch komt het misschien als een wat wonderlijke denkwereld over, die ideeën van Proclus. Laten we zien of er zo'n 1300 jaar later verandering is opgetreden.

4. WOLFF'S *ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSAE*

Christian von Wolff (figuur VII toont zijn portret) leefde van 1679 tot 1754, en werkte dus in de eerste helft van de achttiende eeuw. Daaraan was de zeventiende eeuw voorafgegaan; een heel belangrijke eeuw voor de wiskunde, want toen werden de analytische meetkunde en differentiaal- en integraalrekening ontwikkeld. De wiskunde, in elk geval de geavanceerde wiskunde werd een zaak van algebraïsche en analytische formules en berekeningen; voordien was het vooral een zaak geweest van meetkundige figuren en argumenten.

Op het portret ziet Wolff eruit als een bezadigde geleerde; je stelt je daarbij niet makkelijk voor dat er om zijn figuur politieke stormen zijn geweest die zo hoog gingen dat hij zelfs verbannen werd. Maar zo was het wel. In 1706 was hij in Halle als professor in de wiskunde benoemd. In zijn kolleges verdedigde hij met grote nadruk de ideeën van het rationalisme: de mens kan op zijn eigen verstand vertrouwen, hij kan daarmee de natuur, de wereld doorgronden, ja zelfs kan hij een rationele theologie ontwikkelen en zo tot inzichten komen over God zelf. Dat ging velen te ver; waar was plaats voor geloof en voor openbaring als pijlers van de religie (en van de kerk, en van de maatschappij)? De strijd werd hoog gespeeld; in 1723 overtuigden Wolff's tegenstanders de vorst, koning Friedrich Wilhelm I; Wolff



Figuur VII. Christian von Wolff.

werd ontslagen en uit Pruisen verbannen. Hij ging naar Marburg en werd steeds beroemder; de volgende koning riep hem naar Pruisen terug. Die koning was Friedrich der Grosse die niet zo onder de indruk van theologisch-filosofische ruzies was; in zijn rijk mocht "ein jeder nach seiner Fassung selich werden".

Wolff was beroemd geworden om zijn gedegen en zeer uitvoerige wetenschappelijke werken. Erg origineel was hij daarin niet, maar hij gaf wel heel goed geordende en volledige overzichten van wetenschappelijke kennis. Dat deed hij ook voor wiskunde, en zijn belangrijkste wiskundige werk is het boek dat ik hier wil bespreken, de *Elementa Matheseos Universae*⁷, grondbeginselen van de gehele wiskunde. Een eerste versie van dat boek verscheen in 1713-1715, daarna kwamen er vele nieuwe uitgaven en vertalingen. De uiteindelijke versie bestond uit vijf dikke delen; Figuur VIII geeft de titel-pagina van de "nieuwste editie" van deel I uit 1742, de bijbehorende delen II-V waren al verschenen in 1733-1741.

Wolff's idee over wat tot de Elementen van de wiskunde behoort was totaal anders dan dat van Euclides (verg. in Fig. VIII en IX de lijst van onderwerpen zoals die op de titelpagina's van de delen voorkomt). Deel I bevat eerst een stuk over de wiskundige methode, en dan verhandelingen over rekenkunde, meetkunde, vlakke driehoeksmeting, analyse van eindige grootheden (d.w.z. algebra en analytische meetkunde) en analyse van oneindige grootheden (d.w.z. differentiaal- en integraalrekening). Dat lijkt nog heel herkenbaar als keuze van basisteorieën van de wiskunde. Maar dan komt deel II met mechanica, statica, hydrostatica, theorie van luchtdruk en vloeistofmechanica. Vervolgens deel III: optica, perspectief, optica van spiegels en lenzen, meetkunde van de bol en boldriehoeksmeting en astronomie, zowel beschrijvend als fysisch. Deel IV bevat geografie, hydrografie, tijdrekening, zonnewijzers, techniek van springstoffen, militaire en burgerlijke bouwkunde. Tenslotte deel V met een lange verhandeling over wiskundige literatuur, een stuk over juiste manier om wiskunde te leren en vele indices.

Toepassingen vallen dus wel onder de wiskunde zoals Wolff die ziet, en ook in het eerste deel is zijn stijl heel wat minder strak teoretisch dan die van Euclides. In het meetkunde deel bespreekt Wolff

ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS I.

QUI

COMMENTATIONEM

DE

METHODO MATHEMATHICA,
ARITHMETICAM, GEOMETRIAM,
TRIGONOMETRIAM PLANAM, ET ANALYSIN
TAM FINITORUM, QUAM INFINITORUM
COMPLECTITUR.

AUTORE

CHRISTIANO WOLFIO,
POTENTISSIMI BORVSSORUM REGIS CONSILIARIO INTIMO,
FRIDERICIANÆ PRO-RECTORE ET PRO-CANCELLARIO, JURIS NATURÆ
ET GENTIUM ATQUE MATHEMATUM PROFESSORE ORDINARIO, PROFES-
SORE PETROPOLITANO HONORARIO, ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIA-
RUM PARISIENSIS SOCIETATUMQUE REGIARUM BRITANNIÆ
ATQUE BORUSSICÆ MEMBRO.

EDITIO NOVISSIMA
MULTO AUCTION ET CORRECTIONE
CUM PRIVILEGIIS.

HALÆ MAGDEBURGICÆ,
PROSTAT IN OFFICINA LIBRARIA RINGERIANA
ANNO MDCCXLII.

Figuur VIII. Wolff's *Elementa*.

TOMUS II.

QUI

MECHANICAM CUM STATICA,
HYDROSTATICAM, AËROMETRIAM
ATQUE HYDRAULICAM
COMPLECTITUR.

TOMUS III,

QUI

OPTICAM, PERSPECTIVAM,
CATOPTRICAM, DIOPTRICAM, SPHÆ-
RICA ET TRIGONOMETRIAM SPHÆRICAM ATQUE
ASTRONOMIAM TAM SPHÆRICAM,
QUAM THEORICAM COMPLECTITUR.

TOMVS IV,

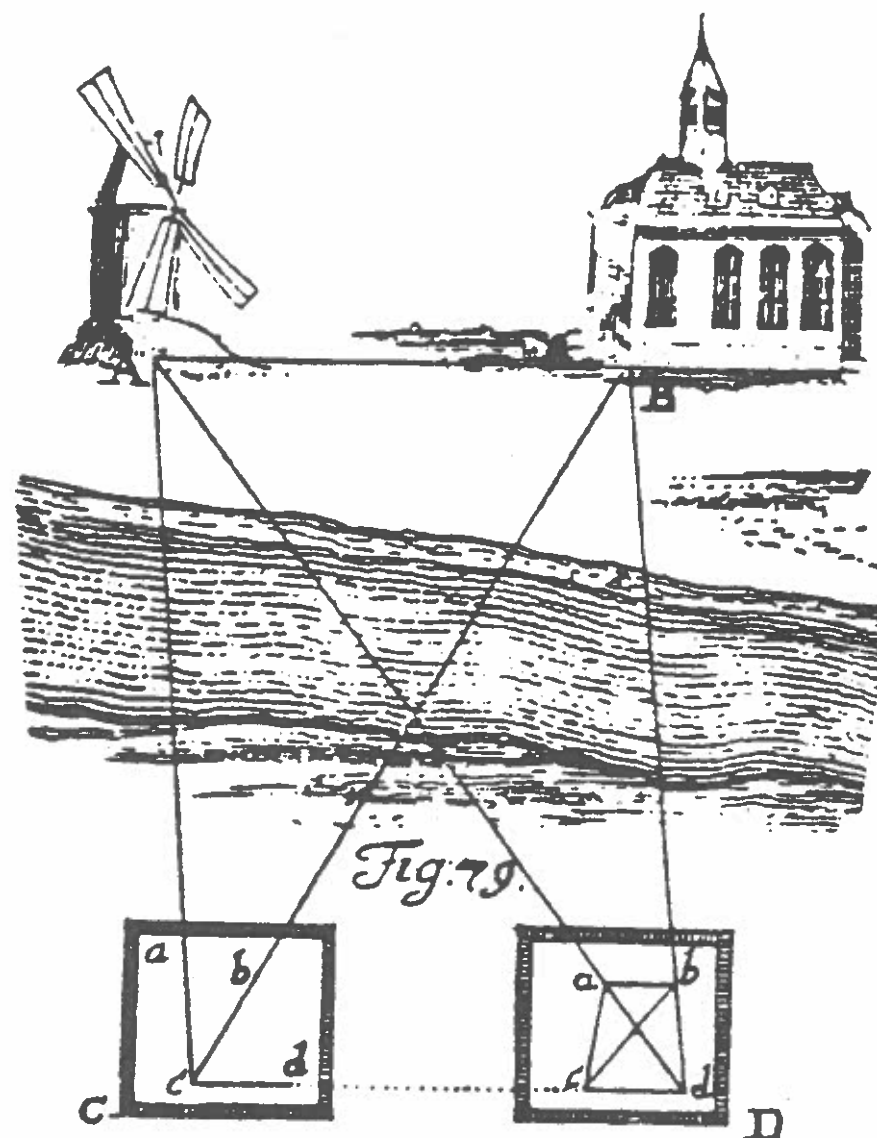
QVI

GEOGRAPHIAM CUM HYDRO-
GRAPHIA, CHRONOLOGIAM,
GNOMONICAM, PYROTECHNIAM,
ARCHITECTVRAM MILITAREM ATQVE
CIVILEM COMPLECTITUR.

TOMVS V.

QVI

COMMENTATIONEM
DE PRÆCIPUIS
SCRIPTIS MATHEMATICIS
COMMENTATIONEM
DE
STUDIO MATHEMATICO
RECTE INSTITUENDO
ET
INDICES IN TOMOS.
QUINQUE MATHESEOS
UNIVERSÆ CONTINET.

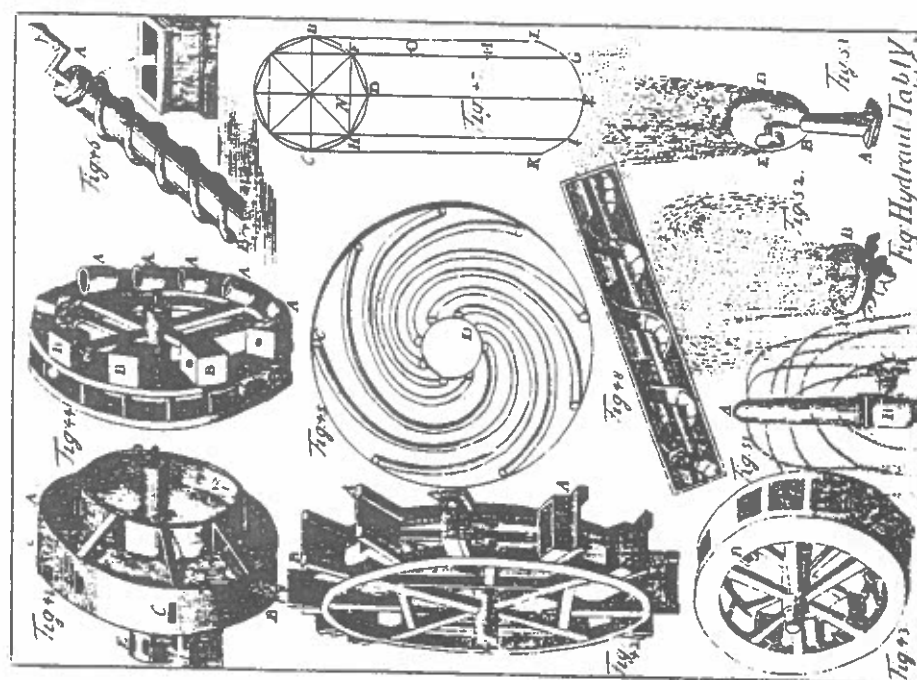
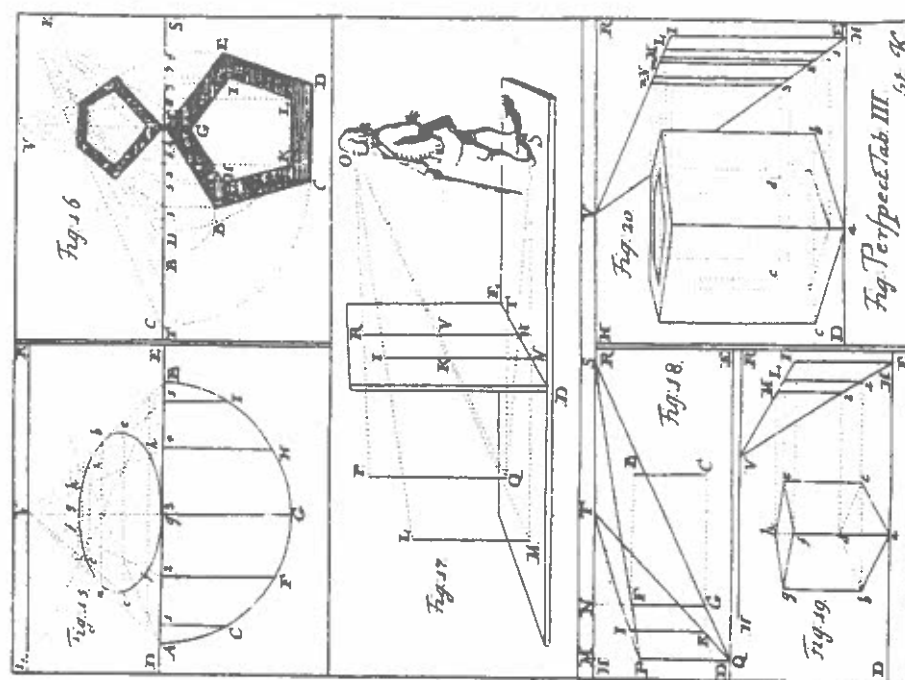
Figuur IX. Wolff's *Elementa*.

Figuur X. Uit Wolff's meetkunde deel.

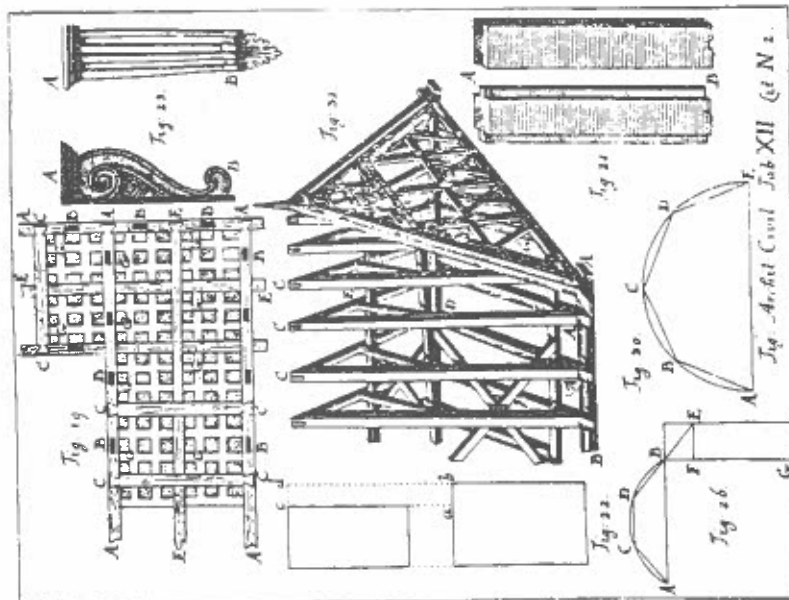
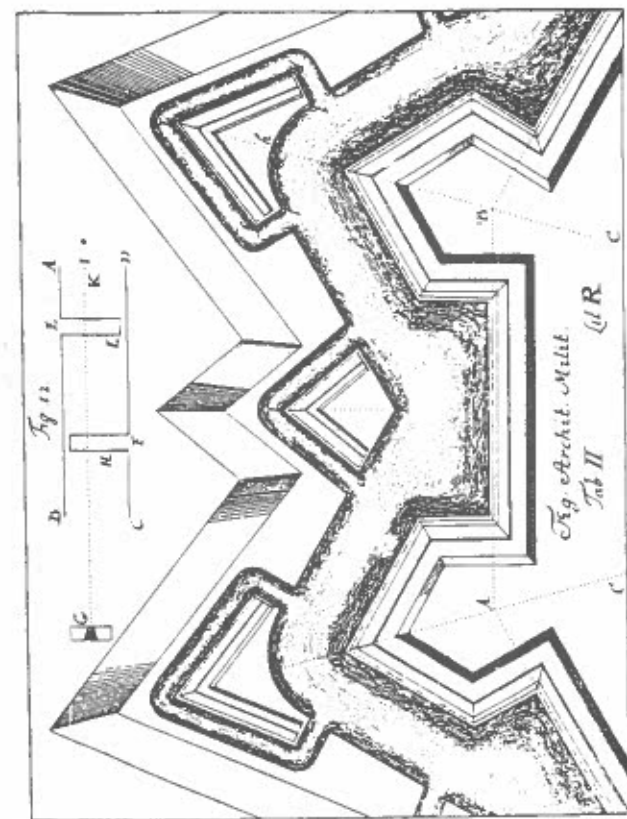
ook het praktische gebruik van de theorie. Figuur X geeft daarvan een voorbeeld: het meten van de afstand tussen twee ontoegankelijke punten. Netjes in punten verdeeld, legt Wolff uit hoe je de afstand tussen molen en kerk aan de overzijde van de rivier met behulp van het landmetersbord kunt bepalen: Plaats het bord in C met cd gericht naar D: trek ca gericht naar de molen A en cb gericht naar de kerk B. Loop dan naar D, richt dc naar C en trek da gericht naar de molen en db gericht naar de kerk. Zo ontstaat een kaart op het bord en de schaal daarvan is te bepalen omdat afstand CD gemeten kan worden. Dus kunnen we de afstand AB op de kaart aflezen.

In Figuur XI staan plaatjes uit Wolff's behandeling van perspectief, vloeistofmechanica, militaire en civiele bouwkunde. Ze geven goed de praktische stijl van het boek weer

Wat was nu de samenhang van al deze onderwerpen; wat was de reden van *deze* keuze van Elementen der wiskunde? Ten dele volgt Wolff het idee van wiskunde zoals dat in de 16e en 17e eeuw gegroeid was: wiskunde is de leer van grootheid en getal. Het vak bestaat uit zuivere wiskunde, waar getal en grootheid abstrakt beschouwd worden, en "gemengde wiskunde" ("mathesis mixta") waar getal en grootheid bestudeerd worden zoals zij in natuur of praktijk voorkomen. Maar er zit meer achter Wolff's keuze der onderwerpen. De behandelde onderwerpen tonen namelijk de kracht van de wiskundige methode. Die methode is erg belangrijk voor Wolff, hij schrijft er uitgebreid over in het voorwoord en in het laatste deel. Het essentiële van de wiskundige methode, zegt Wolff, is dat men eerst de begrippen die men hanteert zeer zorgvuldig expliciet definieert, dat men dan de veronderstellingen ook expliciet als postulaten formuleert, en dat men vervolgens geordend en logisch uit definities en postulaten stellingen afleidt en problemen formuleert en oplost. Erg diepzinnig is dat niet, maar voor Wolff staat deze methode centraal in zijn rationalistische overtuiging van de zelfstandige kracht van het menselijk verstand. De methode is namelijk, zegt hij, overal toepasbaar. En daarmee is ons verstand in staat om buiten de zuivere wiskunde, dus in natuurkunde, astronomie, maar ook in politiek en theologie, zelfstandig zekerheid te verwerven, de waarheid te vinden. Wolff zegt:



Figuur XIa. Platen uit Wolff's *Elementa*.



Figuur XIb. Platen uit Wolff's Elementa.

CAPUT II

De

IGNIBUS BELLICIS SEU NOCIVIS.

DEFINITIO 3.

31. *Granata* est globus ferreus, cupreus vel vitreus pulvere pyrio repletus & tubo ligneo, qui materia incendiaria plenus, instructus. Dicitur *granata minor seu manualis*, si manibus in hostem emitti possit; *major vero sive Bomba*, si ex mortuario ejaculatur.

DEFINITIO 4.

32. *Grando pyrotechnica (eine Kartetsche)* est cylindrus, conus vel conus truncatus ex pyro, lineo crassiori, lamina ferrea &c. confectus, & pulvere nitrato atque catenis, glandibus plumbeis, clavibus, globis sclopetariis &c. repletus.

DEFINITIO 5.

33. *Pluvia pyrotechnica* est globus ligneus pulvere nitrato aliusque materiis incendiariis repletus, qui dissectus materiam ardentem effundit.

DEFINITIO 6.

34. *Urnae seu lagenae pyrotechnicae* sunt vasa fictilia pulvere pyrio repleta, in mediis hostes projici solita.

DEFINITIO 7.

35. *Cylindrus pyrotechnicus* est cylindrus pulvere nitrato repletus.

DEFINITIO 8.

36. *Saccus pyrotechnicus* est saccus pulvere nitrato aliusque necessariis repletus.

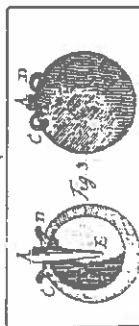
DEFINITIO 9.

37. *Famulus pyrotechnicus* est cylindrus cavus innumeris foraminibus instructus & pulvere pyrio aliusque materiis impletus.

DEFINITIO 10.

38. *Globi incendiarii* sunt globuli ex lineo crassiori parati, pulvere nitrato aliusque materiis replendi.

DE-



Figuur XII. Pyrotechniek uit Wolff's Elementa.

DEFINITIO 11.

39. *Globus lucens* est globus incendiarius, qui lumen intensum undique spargit.

DEFINITIO 12.

40. *Globus fumans* est globus incendiarius, qui fumo aërem circumcirca obducit.

DEFINITIO 13.

41. *Globus feriens* est globus ingentem tractorem spargens, ubi incenditur.

PROBLEMA 7.

42. *Bombam parare.*

RESOLUTIO.

Tab. 1. Fiat ex ferro fuso globus cavus AB facis spissius; habens lumen rotundum in A, per quod bomba repleti & accenduntur, acque anis circuli positi, acque anis circuli commode in mortarium, ex quo ejaculatur, demitti queat.

2. Cum globus super carbonibus candentibus canduerit, aëri libero exponatur, ut leniter frigeat. Quoniam enim ignis ferrum dilatat, occulta quædam foraminula vel rimæ, si adfuerint, aperientur magis, aëre præteritum includit

(Wolff Mathes. Tom. 4.)

vi claudis superficiem continuam perforante (§. 146 *Artem.*).

3. Cavitas globi repletur aqua frigida & lumen probe obturatur.

4. Exterior superficies aqua fervida & sapone lavetur, quia saponaria aqua viscidior reliqua. Quodsi enim quadam foraminula adfuerint, aëre calore rarefactus egredietur (§. cit.) & bullas in superficie globi formabit.

5. Si nullus in globo defectus notetur, cavitas fere tota pulvere pyrio granulato impleatur, inacio nonnisi exiguo vacuo relicto, ut dum

6. tubulus ligneus sive fufum AE figuram con truncati reficiens per lumen adigitur, & glutine ex calce viva, cinere pliro, polline lacerito acque linatura Martis bene confusa mediante aqua glutinosa subigendis, vel ex quatuor partibus picis nigrae, colophoniae paribus duabus, terebinthinae una & ceræ itidem una, composito firmatur, pulvis non coneratur: quoniam granulati major vis deprehenditur.

Mm

"Voor mij is geen doel belangrijker dan dat door de wiskundige studie het intellect vervolmaakt wordt zodat het mogelijk wordt om met dat intellect zekere kennis buiten de wiskunde te verkrijgen."⁸

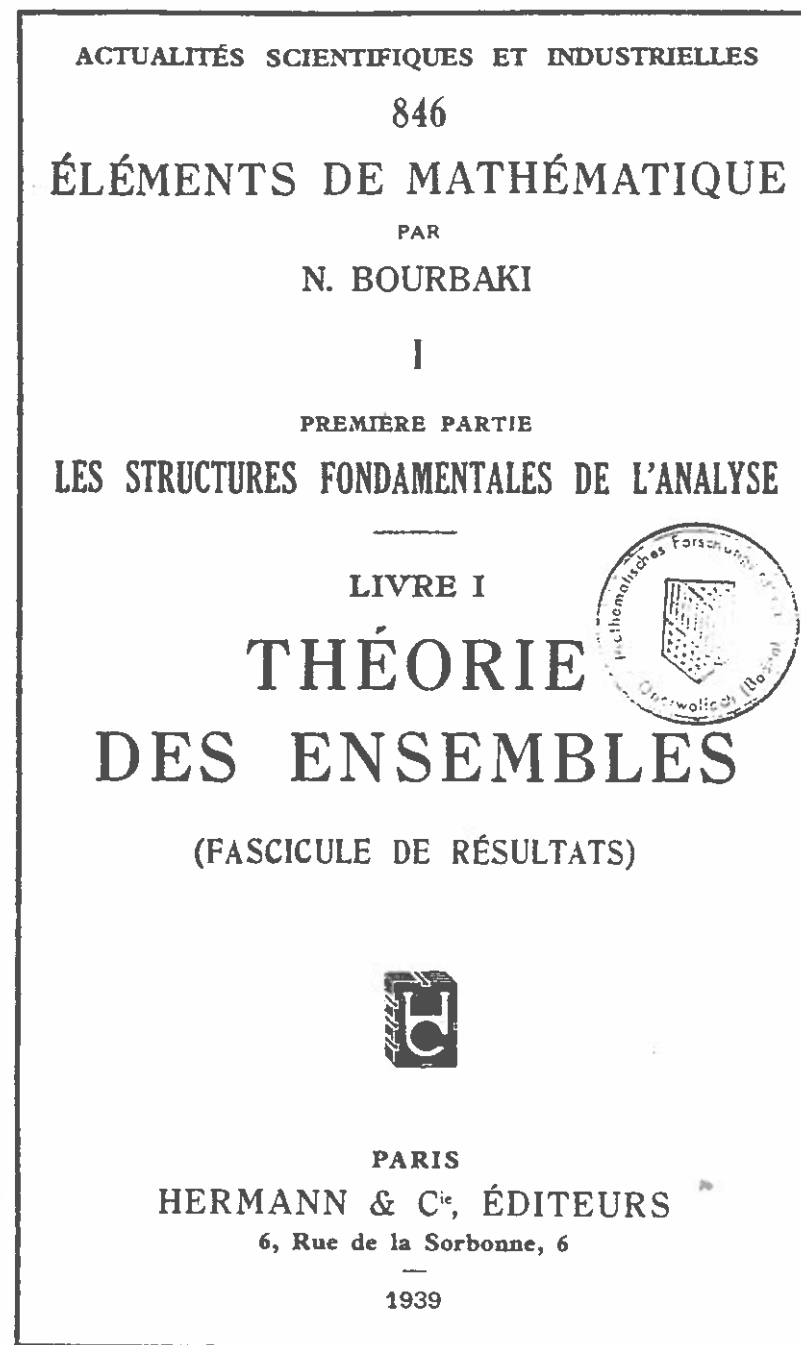
Soms doet die toepassing buiten de wiskunde wel wonderlijk aan, bij voorbeeld in het vierde deel over springstoffen (zie Figuur XII). Inderdaad zien we daar Wolff geheel volgens voorschrift te werk gaan: eerst een lange lijst definities, een granaat in nr. 3, pyrotechnische regen in nr. 5, een brandbom in nr. 10 en zelfs een stinkbom in nr. 13. Dan volgt het probleem: "bombam parare", een bom te maken; en puntsgewijs wordt dan inderdaad uitgelegd hoe dat moet.

We zien dus een groot verschil tussen Euclides' keuze van Elementen, en die van Wolff, namelijk de duidelijke aanvaarding van toepassingen als onderdeel van de wiskunde. Dat is kenmerkend voor de 17e- en 18e- eeuwse wiskunde; men kan zelfs zeggen dat voordien en daarna de wiskunde nooit meer zo breed is geweest. Maar er is ook een overeenkomst tussen de visies van Wolff en Euclides en Proclus op wiskunde: het gaat eigenlijk niet primair om de inhoud van de stellingen, maar om de methode en om de stijl, die ons in staat stelt zelf dichterbij zekerheid en waarheid te komen.

5. BOURBAKI'S *ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE*

Iets meer dan tweehonderd jaar na Wolff treffen we ons derde Elementen boek aan, de *Éléments de mathématique* van Nicolas Bourbaki.⁹ Van Bourbaki kan ik geen portret laten zien. "Bourbaki" is namelijk een pseudoniem voor een groep Franse wiskundigen. Die hebben zelf een paar heel mooie verhalen verspreid over waarom ze die naam gekozen hebben, maar die zal ik hier niet herhalen want ik denk dat ze bij velen bekend zijn.

In elk geval schreef de groep Elementen van de wiskunde, en ze kozen de titel heel nadrukkelijk met de pretentie net zo iets te doen als Euclides indertijd. Het werk bestaat uit apart verschijnende delen en hoofdstukken. Het eerste deeltje verscheen in 1939 (zie Figuur XIII); het werk is nu nog niet voltooid en veel van de verschenen delen zijn inmiddels al een aantal malen herzien en herdrukt. Voor bibliografen



Figuur XIII. Bourbaki's *Éléments*, eerst verschenen deel.

N. BOURBAKI, Eléments de Mathématique (1939-...)

Inhoudsoverzicht

- I: Verzamelingen
o.m: structuren algemeen, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$
- II: Algebra
o.m: lineaire algebra, polynomen, lichamen
- III: Algemene topologie
o.m: topologische groepen, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$
- IV: Funkties van een reële veranderlijke
o.m: afgeleide, integraal, Taylor-ontwikkeling
- V: Topologische vektorruimten
o.m: Hilbert ruimten
- VI: Integratie
o.m: maattheorie
- (K): Lie-groepen en Lie-algebra's
- (L): Kommutatieve algebra
o.m: modulen
- (M): Spektraaltheorieën

Figuur XIV.

is het werk een nachtmerrie.

Wat is nu Bourbaki's visie op Elementen? Dat kan ik het best illustreren met een overzicht van de inhoud (zie fig. XIV). Het werk bestaat uit boeken, ieder verdeeld in hoofdstukken. De apart verschijnende deeltjes (gemiddeld zo'n 100 pagina's groot) bevatten één, twee of drie hoofdstukken. Boek I bevat de theorie van verzamelingen en structuren in het algemeen, verder de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ en de gehele getallen $\mathbb{Z}$. Boek II is algebra, met algebraïsche structuren in het algemeen, lineaire en multilineaire algebra, polynomen, lichamen, modulen, kwadratische vormen en homologische algebra. Boek III gaat over algemene topologie; topologische structuren, topologische groepen, de reële getallen $\mathbb{R}$, de ruimten $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{P}^n$, de complexe getallen $\mathbb{C}$ en funktieruimten. Boek IV behandelt funkties van een reële veranderlijke; afgeleide en integraal, differentiaalvergelijkingen, Taylor ontwikkelingen en de Γ -functie. Boek V gaat over topologische vektorruimten en Hilbertruimten. Boek VI behandelt integratie, maattheorie, L^p -ruimten, vektoriële integratie en de Haarmaat. Dan zijn er nog drie boeken die geen nummer hebben gekregen, een over Liegroepen en Liealgebra's, een over kommutatieve algebra en een over spektraaltheorieën.

Wel, een groter contrast met Euclides en Wolff is nauwelijks denkbaar. De toepassingen, die bij Wolff zo'n grote plaats innamen, zijn allemaal weg. Dat is niet iets speciaals van Bourbaki; het is een negentiende-eeuwse ontwikkeling. In die periode is de universitaire zuivere wiskunde gecreëerd als theoretisch geheel zonder veel directe verbinding met toepassingen. Wel speciaal van Bourbaki is de indeling. De oude verdeling van de wiskunde in meetkunde, algebra, analyse en de rest vinden we niet terug. Dat is een heel bewuste keuze geweest en er zit een verhaal achter dat begint in de Franse wiskundige wereld van de 1920'er en 30'er jaren. Een van de toen jonge wiskundigen, Dieudonné, die later ook de Bourbaki groep mee heeft opgericht, schrijft over zichzelf en zijn leeftijdgenoten-wiskundigen als een "vaderloze generatie".¹⁰ De vorige generatie, die hun leermeesters had moeten zijn, was in de oorlog naar het front gestuurd en grotendeels niet terug gekomen. Dus kregen ze onderwijs van hun "grootvaders", goed, gedegen onderwijs, maar dertig jaar

achter. In Duitsland was dat anders; daar was, vooral in Göttingen, de wiskunde na de oorlog snel weer opgebloeid; de modernisering, begonnen door Dedekind, Hilbert en vele anderen, was voortgezet: Artin en Emmy Noether ontwikkelden er de axiomatische methode in de wiskunde verder. Een jonge Nederlandse wiskundige, van der Waerden, was ook naar Göttingen gekomen, en hij vatte al dat nieuwe samen in zijn beroemde (Duitse) boek *Moderne Algebra* dat in 1930-31 verscheen.

Door dat boek, en door bezoeken aan Duitse universiteiten kregen de jonge Franse wiskundigen te zien hoever ze achter waren geraakt en wat er werkelijk gaande was. Er was een nieuwe en heel succesvolle aanpak van de algebra ontstaan: de "axiomatische methode". Algebra werd gezien als de theorie van *structuren*: verzamelingen met operaties vastgesteld door axioma's, zoals groepen, ringen, lichamen, modulen etc. Die aanpak had veel nieuwe resultaten opgeleverd en er was op een overtuigende manier eenheid gebracht in de algebraïsche theorie.

Na de eerste schok reageerden de jonge Franse wiskundigen met enorm enthousiasme. Dit was de beste manier om wiskunde te beschrijven: alle wiskundige theorieën met behulp van de axiomatische methode opbouwen vanuit de verzamelingenleer. Het idee ontstond om een boek over analyse in deze stijl te schrijven, al gauw bleek dat de nieuwe opzet de hele wiskunde moest omvatten. Men werd gekonfronteerd met het probleem van indeling en koos voor een radicale oplossing. Meetkunde, algebra en analyse waren achterhaalde afgrenzingen; het sleutelbegrip voor de nieuwe aanpak, structuren, moest ook de nieuwe indeling leveren. De eenvoudigste structuren zijn: algebraïsche structuren (met bewerkingen $+$, $\times$ of andere), ordenings-structuren (met de relatie $<$) en topologische structuren (met een limiet begrip). Alle andere structuren ontstaan door combinaties van deze. Eerst moeten dus de basisstructuren behandeld worden, daarna de samengestelde. Dat is dan ook in grote lijnen de opbouw van de *Éléments*, en een van de gevolgen ervan is dat zulke vertrouwde onderwerpen als reële getallen en reële functies pas laat aan de orde komen, in boek III en IV. En de meetkunde? Die is helemaal verdwenen, het is immers, zoals een der Bourbakisten schreef, "algemeen bekend dat euclidische meetkunde een speciaal geval is van de theorie van hermitesche operatoren in Hilbertruimten".¹¹

Met dit enthousiasme en met deze radicale ideeën ging men aan het werk; de indeling werd gepland, er waren eindeloze groepsdiscussies; het eerste deeltje verscheen in 1939. Gedurende de oorlog verschenen er nog drie deeltjes en vanaf ca. 1950 kwam de onderneming goed op gang. De boeken verschenen overigens niet in de logische volgorde; van boek I was er tot 1959 slechts een samenvatting gepubliceerd, terwijl toen de boeken II, III, IV en V ieder al voor meer dan de helft gepubliceerd waren.

Bourbaki's *Éléments* hadden na de oorlog een enorme invloed op stijl, denkwijze en onderzoeksrichting in de wiskunde. De "Bourbaki-visie" op wiskunde werd dan ook met grote overtuiging gepropageerd. Ik kan dat het beste illustreren met een aantal citaten uit artikelen van voorvechters van de nieuwe richting. Gustave Choquet schreef in 1963:

"Van nu af aan is er voor Bourbaki nog maar *één wiskunde*, en het essentiële gereedschap bij deze ontwikkeling naar eenheid is de axiomatische methode."¹²

Bourbaki zelf zegt:

"Men zou dus kunnen zeggen dat de axiomatische methode niets anders is dan het "Taylor systeem" van de wiskunde."¹³

Hij verwijst daarbij naar de theorieën van de Amerikaan F.W. Taylor (1860-1938) over verbetering van de industriële produktie door rationalisering van het produktie proces (lopende band systeem etc.). De beeldspraak past in de tijd van wederopbouw na de oorlog en geloof in economische groei met Amerika als voorbeeld. Bourbaki ziet de wiskunde ook als

"... een grote stad, waarvan de buitenwijken op een wat chaotische manier groeien op het omliggende terrein, terwijl het centrum regelmatig vernieuwd wordt, iedere keer volgens een duidelijker plan en een meer majestueuze ordening, waarbij de oude wijken met hun doolhoven van stegen worden neergehaald om hoofdwegen naar de buitenwijken aan te leggen die steeds direkter, breder en gemakkelijker worden."¹⁴

Het is opvallend hoe gedateerd deze beeldspraak is; ik denk dat wij intussen te veel oude stadswijken hebben zien verdwijnen en te veel betonnen flatwijken rond onze steden hebben staan om makkelijk

overtuigd te worden van het vooruitgangsgeloof dat in de 50'er en vroege 60'er jaren met deze beeldspraak ondersteund werd.

Maar de boodschap was duidelijk genoeg: de wiskunde gefundeerd op het begrip verzameling; het doel: de studie van structuren, het middel: de axiomatische methode. De *Éléments de mathématique* vormden het voorbeeld van die visie en de bijbehorende stijl, en dat voorbeeld heeft een enorme invloed gehad op een hele generatie wiskundigen. Dat wil niet zeggen dat er geen kritiek was op de Bourbakistische visie. Er werd vaak bezwaar geuit tegen de strakke, abstrakte, monolythische opbouw van de wiskunde. En vooral toen de ideeën in het onderwijs doordrongen, via de "New Math" en de invoering van verzamelingentheorie in het wiskunde leerplan, is er veel kritiek geweest. Die kritiek heeft wel effect gehad. In 1963 schreef Choquet nog:

"Onze leerlingen moeten er zo snel mogelijk aan gewend worden te denken in termen van verzamelingen en operaties, zij moeten al vroeg de taal en de algebra van verzamelingen kunnen gebruiken, (-) vele ervaringen hebben geleerd dat kinderen graag daarvan gebruik maken."¹⁵

Maar bijna twintig jaar later klinkt een ander geluid (overigens geformuleerd met dezelfde vanzelfsprekendheid en overtuiging)

"Er is geen sprake van dat Bourbaki ooit opinies heeft gegeven over de mogelijkheid of de wenselijkheid om de begrippen die beschreven zijn in het boek op een lager niveau in te voeren, en zeker niet op lagere of middelbare scholen. Mensen die dit soort aberraties voorstellen hebben meestal, zacht gezegd, een povere kennis van moderne wiskunde."¹⁶

Dat was Dieudonné in een voordracht uit 1982 over het werk van Bourbaki.

6. ELEMENTEN, STIJL EN ONDERWIJS

Elementen-boeken geven dus aanleiding tot discussie. Het is belangrijk om dat op te merken want op het eerste gezicht lijkt er weinig strijd mogelijk over boeken waarin de basisteorieën van de wiskunde worden opgeschreven. Maar we hebben aan de voorbeelden gezien

dat de Elementen steeds werken als kodifikaties van zekere stijlen van wiskunde, en daarmee van de speciale visies op wiskunde die achter die stijlen verborgen zitten. Steeds, we hebben het ook bij Bourbaki's *Éléments* gezien, gaat het niet in de eerste plaats om de inhoud van de basisteorieën, maar om de stijl die daarmee wordt vastgelegd en gepropageerd.

Zulke stijlen werken door in het onderwijs - ze zijn tenslotte vastgelegd in basisboeken, en daarop worden weer, bewust of minder bewust, leerboeken gebaseerd. Maar de achtergronden van die boeken, de redenen waarom voor een bepaalde stijl gekozen wordt, de visies op wiskunde die erbij meespelen en de discussies voor en tegen deze visies - al deze dingen dringen meestal niet of nauwelijks in het onderwijs door. En dat is jammer, want daardoor lijken de Elementen van de wiskunde zo onwrikbaar vast te liggen. Euclides' *Elementen* hebben eeuwen lang gegolden als de onveranderbare basis voor wiskunde. Of Wolff's *Elementa* ook zo gezien zijn weet ik niet, ik denk niet in die mate. Maar voor vele wiskundigen hebben Bourbaki's *Éléments* toch wel enige tijd gegolden als het vaste, afdoende antwoord op de vraag wat wiskunde werkelijk is.

Wat ik heb willen laten zien is dat achter zulke schijnbaar onwrikbare wiskundige bouwwerken visies op wiskunde zitten, dat die visies in de loop der tijden veranderen, dat daarmee ook de wiskundige stijlen veranderen en dat daarover discussie wordt gevoerd. Ik geloof dat het goed is als ook in het onderwijs de wiskunde niet als onwrikbaar vast en onveranderlijk wordt gepresenteerd. En als daartoe zulke historische verhalen over Elementen der wiskunde als ik nu verteld heb kunnen bijdragen, dan heeft de studie van de geschiedenis van de wiskunde ook zijn nut voor de huidige wiskunde - en daar wil ik mijn gehoor altijd graag van overtuigen.

Noten

1. HALMOS, P.R., "Does mathematics have elements?", *Math. Intell.* 3 (1981) pp. 147-153.
2. EUCLIDES, *De ses eerste boecken Euclidis (-) overgheset verklaert, ende uytgheleyt (-)* door Ian Pietersz. Dou (-) Rotterdam 1632 (zie Figuur IV).
3. HEATH, TH. L., *The thirteen books of Euclid's Elements* (3 vols.), Cambridge 1908, (2e editie 1926, herdruk v.d. 2e editie New York (Dover) 1956). Zie ook: Dijksterhuis, E.J., *De Elementen van Euclides* (2 vols.) Groningen 1929-30.
4. Vgl. HEATH, Th.L., *A history of Greek mathematics* (2 vols) Oxford 1921, 1, p. 357.
5. PROCLUS, *A commentary on the first book of Euclid's Elements* (tr., intr. G.R. MORROW), Princeton 1970, pp. 17-18. De vertaling in het Nederlands is, evenals bij de nog volgende citaten, van mij, H.B.
6. Proclus (noot 5) pp. 23-24.
7. WOLFF, C., *Elementa Matheseos Universae* (5 vols) Halle 1733-1742) (fotomech. herdruk Hildesheim 1968).
8. Wolff (noot 7) 5, p. 250.
9. BOURBAKI, N., *Éléments de mathématique* (vele delen) Paris (sinds 1939).
10. DIEUDONNÉ, J., "The work of Nicolas Bourbaki", *Amer. math. monthly* 77 (1979) pp. 134-145, vgl. p. 134.
11. Dieudonné (noot 10) p. 139.
12. CHOQUET, G., "Die Analysis und Bourbaki", *Math. Phys. Sem. Ber.* 9 (1963) pp. 1-21, hier p. 1.
13. BOURBAKI, N., "L'Architecture des mathématiques", *Les grands courants de la pensée mathématique* (ed. F. Le LIONNAIS, Paris (nouv. éd.) 1962) pp. 35-47, hier p. 42. Het stuk moet kort na 1945 geschreven zijn.

14. Bourbaki (noot 13) p. 45.
15. Choquet (noot 12) p. 19.
16. DIEUDONNÉ, J., "The work of Bourbaki during the last thirty years", *Bull. Amer. Math. Soc.* 29 (1982) pp. 618-623, hier p. 623.

Lijst van figuren

- I. Euclides, relief door Andrea Pisano aan de Campanile van de Dom in Florence, ca. 1340. Illustratie uit MEYERS *Enzyklopedisches Lexikon* s.v. "Euklid".
- II. Pagina uit een manuscript van Euclides *Elementen* uit 888. Het betreft boek III prop. 4. Illustratie uit Heath's *Euclid* (zie noot 3), frontispiece.
- III. Eerste pagina uit de editie Venetië 1508 van de Latijnse vertaling van de *Elementen*.
- IV. Titelpagina en begin van de tekst uit Dou's Euclides-uitgave 1632 (zie noot 2).
- V. Elem. I 47, de stelling van Pythagoras, in de vertaling van Heath (*Euclid*, zie noot 3, 1 pp. 349-50). De aanduiding van de onderdelen in de marge heb ik toegevoegd.
- VI. Tabel, overzicht van de inhoud van Euclides' *Elementen*.
- VII. Christian von Wolff (1679-1754), frontispiece van *Elementa* (zie noot 7) 1.
- VIII. Wolff's *Elementa*, 1, titelpagina.
- IX. Inhouden van Wolff's *Elementa* 2-5; kollage van gedeelten van de titelpagina's van die delen.
- X. Gedeelte van plaat 4 bij het hoofdstuk Geometrie uit Wolff's *Elementa* 1, na p. 262. Figuur 79 betreft de bepaling van de afstand tussen onbereikbare punten.
- XI. Platen uit Wolff's *Elementa* over vloeistofmechanica (2 na p.506), perspectief 3 na p. 134), militaire architectuur (4 na p.382) en burgerlijke architectuur (4 na p.488).
- XII. Begin van Hoofdstuk 2 van het deel pyrotechniek uit Wolff's *Elementa* 4 pp. 272-73; definities en de konstruktie van een bom (inzet fig. 3 is overgenomen uit de bijbehorende plaat).
- XIII. Bourbaki's *Éléments* (zie noot 9); titelpagina van het eerst verschenen deel.
- XIV. Tabel, inhoudsoverzicht van Bourbaki's *Éléments*.