

Descartes en het Begin van de Analytische Meetkunde

H.J.M. Bos

(1) Als we de geschiedenis van de wiskunde in de zeventiende eeuw van verre bezien, dan zijn er twee hoogtepunten: het ontstaan van de *Analytische Meetkunde* in de 1630'er jaren, vooral door het werk van Descartes en Fermat, en de schepping van de *Differentiaal- en Integraalrekening* door Newton en Leibniz in de periode 1665-1685. Bij beide vernieuwingen ging het erom redeneringen die voordien alleen meetkundig werden gevoerd—in proza weergegeven argumenten met betrekking tot een meetkundige figuur—symbolisch weer te geven met behulp van een serie formules, waarbij de logische stappen de vorm kregen van algebraïsche afleidingen. Beide zijn daarmee voorbeelden van een proces dat heel sterk de zeventiende-eeuwse wiskunde heeft bepaald: de verbinding van algebra en meetkunde, van figuur en formule.

Wat betreft de analytische meetkunde is het belangrijkste moment geweest de publikatie in 1637 van Descartes' *Géométrie*, want die verhandeling en de latere van uitvoerig commentaar voorziene Latijnse vertalingen ervan verspreidden de nieuwe techniek onder de zeventiende-eeuwse wiskundigen. In het volgende zal ik ingaan op de vraag wat dat boek inhield en wat Descartes ermee voorhad.

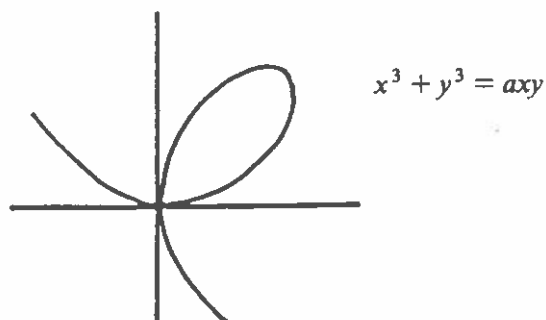
(2) Descartes' eigen interesses waren vooral filosofisch van aard. Twee thema's stonden centraal in zijn filosofisch denken: de vraag naar *methode* en die naar *waarheid en zekerheid*. De *Géométrie* was niet een losstaand boek, het was een verhandeling die als appendix was opgenomen bij Descartes' filosofische hoofdwerk, de *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*[†] (Verhandeling over de methode om het verstand goed te sturen en de waarheid te zoeken in de wetenschappen), dat in 1637 in Leiden verscheen. Descartes zag zijn meetkundige studie als een voorbeeld van toepassing van een filosofische methode om zekere kennis te verkrijgen. Dat dat voorbeeld een wiskundig voorbeeld was is niet verwonderlijk want Descartes putte inspiratie uit de wiskunde; in de *Discours* schrijft hij met bewondering over de 'lange ketens van redeneringen' ('longues chaînes de raisons') die de wiskundigen gebruiken om resultaten af te leiden; bij iedere stap, iedere schakel in de keten, blijft de zekerheid bewaard; het resultaat is even

[†] DESCARTES, R., *La Géométrie* (een der 'essays' bij) *Discours de la méthode*, Leiden 1637 (pp. 297-413). De *Géométrie* is het eenvoudigst toegankelijk in: D.E. SMITH and M.L. LATHAM (eds.), *The geometry of René Descartes*, New York (Dover) 1954; deze editie bevat een facsimile van de oorspronkelijke tekst en een vertaling in het Engels. De *Discours* raadpleegt men het best in DESCARTES, R., *Discours de la méthode, texte et commentaire par Etienne Gilson*, Paris (J. Vrin) 1925 (er zijn ook latere edities).

zeker als de uitgangspunten. Maar hoe kon men van die axioma's weten dat ze zeker waren? Descartes gaf een criterium voor zekere kennis: als men bij zorgvuldige en langdurige overdenking tenslotte een helder en duidelijk ('clair et distinct') beeld voor ogen heeft van een zaak dan mag men er zeker van zijn dat dat beeld overeenkomt met de waarheid.

De meetkunde was in Descartes' tijd nog sterk bepaald door de klassieke Griekse meetkunde. Euclides' *Elementen*[†] vormden de algemeen aanvaarde grondslag van alle meetkundige studies; daar zag Descartes ook de lange ketens van redeneringen die hij zo bewonderde. Hogere meetkunde, zoals de theorie van kegelsneden en de bepaling van oppervlakten en inhouden van figuren, werd geleerd uit de werken van Apollonius en Archimedes. Slechts incidenteel werden resultaten bereikt die essentieel uitgingen boven het Griekse mathematische erfgoed.

(3) Uit het samengaan van Descartes' filosofische interesses en de interesses van het toenmalige vakgebied meetkunde ontsproot de *Géométrie*, het boek dat in grote mate bijdroeg tot de analytische meetkunde, het boek waarin we de belangrijkste aanzet vinden voor het idee dat meetkundige figuren, in het bijzonder krommen, corresponderen met algebraïsche objecten, namelijk vergelijkingen in twee variabelen. Zo correspondeert bijvoorbeeld de kromme in Figuur 1, die later naar Descartes genoemd is (het 'folium', blad, van Descartes) met de vergelijking $x^3 + y^3 = axy$. Door deze correspondentie kan men figuren bestuderen door de bijbehorende vergelijking te beschouwen en omgekeerd kan men over vergelijkingen veel te weten komen door de figuren te bestuderen waarmee ze corresponderen.



FIGUUR 1

(4) Maar, als men de *Géométrie* opslaat met het idee een boek over analytische meetkunde in handen te hebben dan wordt men met vele puzzels

[†] Over de *Elementen* zie DIJKSTERHUIS, E.J., *De Elementen van Euclides*, Groningen 1929-1930. De tekst zelf is het eenvoudigst te raadplegen in HEATH, TH.L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, New York (Dover) 1956 (oorspr. ed. 1908).

geconfronteerd. Ik noem er een paar: (1) Er staan geen axioma's, stellingen en nauwelijks bewijzen in de *Géométrie*. Op het eerste gezicht is het dus zeer onduidelijk in welk opzicht de *Géométrie* past in Descartes' beeld van de wetkunde waarin zekerheid verkregen wordt door ketens van redeneringen. (2) Men kan zich ook afvragen in hoeverre het idee dat een kromme weergegeven wordt door een vergelijking (en vice versa) voldoet aan Descartes' criterium van zekerheid. Een vergelijking levert een impliciete definitie van een kromme: punten waarvan de coördinaten aan de vergelijking voldoen behoren tot de kromme, andere niet. Maar kent men de kromme dan ook? Hoe moet men zich, vanuit de vergelijking, de krommen 'helder en duidelijk' voor ogen brengen? (3) De analytische meetkunde dient vooral voor de studie van krommen; echter in de vroeg-moderne meetkunde was er eigenlijk relatief weinig belangstelling voor krommen; er was meer aandacht voor problemen omtrent rechte lijnfiguren (driehoeken e.d.). Maar voor zulke problemen is analytische meetkunde geen geschikte methode. (4) De *Géométrie* bevat een uitgebreide theorie over vergelijkingen in één onbekende, hun wortels, het gedrag van de coëfficiënten bij substituties en dergelijke. Het is op het eerste gezicht volledig onduidelijk wat deze theorie van doen heeft met analytische meetkunde, die immers vergelijkingen in twee variabelen betreft. — En tenslotte is er, wat ik zelf het meest curieuze aspect van het boek vind, de demarcatie van de meetkunde: (5) Descartes stelt met grote nadruk dat sommige objecten wel tot de meetkunde behoren en andere niet. In het bijzonder meent hij dat sommige krommen wel en andere zeker niet in de meetkunde gebruikt mogen worden. Hij werkt dus met een principiële demarcatie van de meetkunde. Die demarcatie blijkt te zijn: alles wat algebraïsch is (algebraïsche krommen met name) is toelaatbaar in de meetkunde, maar niet-algebraïsche zaken, transcendent krommen bijvoorbeeld, horen niet in de meetkunde thuis. Welnu, waarom zou algebra het criterium voor een zo principiële afgrenzing van de meetkunde leveren?

(5) Dat zijn voorlopig genoeg puzzels en we kunnen, om ze op te lossen, niet beter doen dan de *Géométrie* te lezen. De eerste zin van het werk luidt:

Alle problemen van de meetkunde kunnen eenvoudig in zulke termen herschreven worden dat het daarna slechts nodig is om de lengte van zekere rechte lijnstukken te kennen, om de problemen te construeren[†].

Die eerste zin maakt goed duidelijk waarover het volgens Descartes in de meetkunde gaat: om het oplossen van problemen, en dat oplossen betekent construeren. Descartes zag dus meetkunde als probleem oplossen. Die opvatting was niet ongewoon in zijn tijd; vele meetkundigen beschouwden toen de meetkundige theorie in zekere zin als voltooid en zagen hun taak vooral in het

[†] Tous les Problemes de Geometrie se peuvent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoistre la longueur de quelques lignes droites, pour les construire (p. 297).

toepassen van de klassieke stellingen bij het oplossen van problemen. Op ons komt zo'n visie wat ongewoon over, wij zouden wellicht eerder verwachten dat meetkunde gezien werd als de studie van een axiomatisch deductief systeem van stellingen en bewijzen, of als de onderneming om nieuwe eigenschappen van allerlei meetkundige objecten te vinden. Voor Descartes was meetkunde echter problemen oplossen en we zullen, om het boek te begrijpen, moeten nagaan wat voor problemen hij op het oog had, en wat hij bedoelde met het construeren van de oplossingen.

(6) We kunnen dat het beste doen door een voorbeeld te geven van een probleem met een constructie. Als voorbeeld kies ik een probleem uit de *Geometria practica* (Praktische meetkunde) van Christoph Clavius, dat in 1604 verscheen.[†] Descartes heeft dat boek vrijwel zeker gelezen en het voorbeeld is karakteristiek voor het soort problemen dat omstreeks 1600 veel werd bestudeerd. Het probleem betreft de verdeling van een driehoek in twee gelijke delen. Figuur 2 geeft de gang van zaken weer; ik beschrijf het probleem en de constructie die Clavius voorschrijft stapsgewijs:

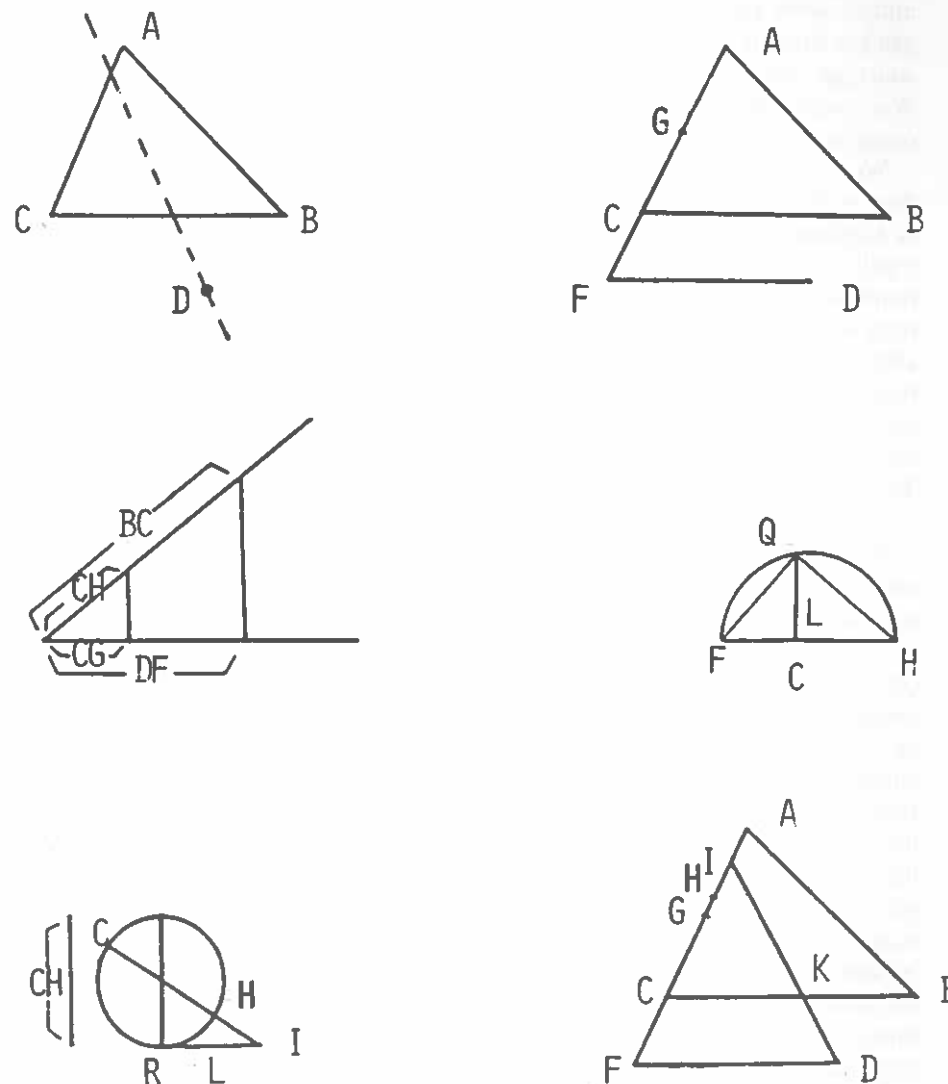
Probleem. Gegeven een driehoek ABC en een punt D; er wordt gevraagd een lijn door D te construeren die de driehoek in twee gelijke delen verdeelt. (Clavius behandelde het geval dat de lijn DA de driehoek verdeelt in delen waarvan het rechter kleiner dan het linker is; de gevraagde lijn zal dan dus links van A lopen—andere gevallen gaan analoog.)

Constructie. (1) Trek een lijn door D evenwijdig aan CB; die snijdt het verlengde van AC in F; deel AC middendoor in G. (2) Neem H op CA zo dat CH de vierde evenredige is van DF, BC, en CG (dat wil zeggen $DF:BC = CG:CH$). Deze constructie kon Clavius aan zijn lezers overlaten, hij staat namelijk bij Euclides (*Elementen* 6-12). Euclides schrijft voor dat men DF, BC en CG afpast langs de benen van een willekeurige hoek als in de figuur; men verbindt de uiteinden van BC en DF en trekt een evenwijdige lijn door het uiteinde van CG, die lijn bepaalt op het andere been de gevraagde CH. (3) Bepaal de middelevenredige L van FC en CH (dat wil zeggen het lijnstuk L met de eigenschap $FC:L = L:CH$). Ook dit was een standaardconstructie (*Elementen* 6-13) en werd als volgt uitgevoerd: pas FC en CH af langs een rechte; trek een halve cirkel met FH als middellijn; richt een loodlijn op in C die de cirkelboog snijdt in Q; CQ is de gevraagde middelevenredige L. (4) Bepaal I op CA zo dat rechthoek (CI, HI) = vierkant (L, L), dat wil zeggen $CI \cdot HI = L^2$. Clavius verwees hier naar een constructie die hij had uitgewerkt in zijn uitgave van Euclides *Elementen*[‡] als commentaar bij Stelling 36 uit boek 6. Die constructie verliep zo: trek $RI = L$ en daarop loodrecht in R een lijn gelijk aan CH; trek een cirkel met de laatstgenoemde lijn als middellijn; trek een lijn door I en het middelpunt van die cirkel, die lijn snijdt de cirkel in H

[†] CLAVIUS, C., *Geometria practica*, Rome 1604, boek VI, Prop. 12, pp. 294-295.

[‡] *Euclidis Elementorum libri XV* (-) (ed. C. Clavius), Rome 1589.

en C; CI en HI voldoen aan de gevraagde relatie. (5) Trek een lijn door D en I, die snijdt CB in K; DI is de gevraagde lijn; dat wil zeggen driehoek $CKI = \frac{1}{2}$ driehoek ABC. — Na de constructie uitgelegd te hebben leverde Clavius het bewijs dat de uitkomst inderdaad correct was.[†]



FIGUUR 2

[†] Kort samengevat is het bewijs als volgt (de nummers verwijzen naar de constructiestappen): $CI \times IH = {}^{(4)} L^2 = {}^{(3)} CF \times CH$. Dus $IH:CH = CF:CI$, zodat $(IH + CH):CH = (CF + CI):CI$, dat wil zeggen $CI:CH = IF:CI = FD:CK$ (gelijkvormige driehoeken). Dus $CK \times CI = FD \times CH = {}^{(2)} CG \times BC = \frac{1}{2} AC \times BC$, en daarom driehoek $CKI = \frac{1}{2}$ driehoek ABC.

(7) Er zijn een aantal dingen die opvallen aan dit voorbeeld en die karakteristiek zijn voor de vroeg-moderne traditie van meetkundige problemen. Allereerst: Clavius presenteert de oplossing apodictisch: zo moet het, de meester doet het voor en bewijst ook nog dat het klopt, de leerling kan weinig anders doen dan in bewondering de stappen volgen. Wat Clavius niet weer geeft is hoe hij de constructie *gevonden* heeft; je leert hieruit niet hoe je zelf dit soort problemen zou kunnen oplossen, er is geen *vindmethode*, geen *analyse*. Waarschijnlijk zat er wel zo'n methode achter Clavius' oplossing, maar de constructie en het bewijs verraden die niet.

We zien ook wat een wonderlijke activiteit eigenlijk het probleemoplossen in deze stijl is. De taak van de wiskundige, als hij een probleem voorgelegd krijgt, is blijkbaar om een formalistische procedure op te schrijven, die aan zekere regels voldoet, maar daarbij ook erg abstract blijft. Er wordt verwezen naar handelingen, die echter niet feitelijk uitgevoerd worden—niemand verwacht dat men werkelijk met papier, potlood, passer en liniaal alle stappen uitvoert—een abstract ritueel. Als de procedure volgens de regels, de riten, opgeschreven is, heeft de meetkundige zijn taak volbracht. Het is duidelijk dat in zo'n onderneming de *regels* waaraan voldaan moet worden van groot belang zijn—als men aan de regels tomt, veranderen de oplossingen. Wat waren deze regels? Twee waren er duidelijk: men moest zo mogelijk met *passer en liniaal* construeren, en de constructie moest *zo eenvoudig mogelijk* zijn. Clavius' constructie voldoet aan beide eisen; alle stappen kunnen met passer en liniaal uitgevoerd worden en men kan zich ervan overtuigen dat de constructie niet essentieel eenvoudiger kan.

(8) De eerste eis was in zoverre problematisch dat meetkundigen al in de Griekse oudheid ondervonden hadden dat sommige problemen niet met passer en liniaal construeerbaar zijn. Dat was in het bijzonder het geval bij de drie zogeheten 'klassieke' problemen, de trisectie van de hoek, de constructie van twee middelevenredigen, en de quadratuur van de cirkel (zie Figuur 3). Bij de trisectie wordt gevraagd een willekeurige gegeven hoek in drie gelijke delen te delen. Bij het probleem van twee middelevenredigen gaat het erom bij twee gegeven lijnstukken a en b twee andere x en y te construeren zodat a, x, y en b een meetkundige reeks vormen, dus $a : x = x : y = y : b$; de x en y zijn de twee 'middelevenredigen' van a en b . (Bij stap 3 in Clavius' constructie kwamen we de gewone middelevenredige tegen, dat is een x met $a : x = x : b$.) De quadratuur van de cirkel, tenslotte, vraagt een vierkant te construeren met oppervlakte gelijk aan dat van een gegeven cirkel.

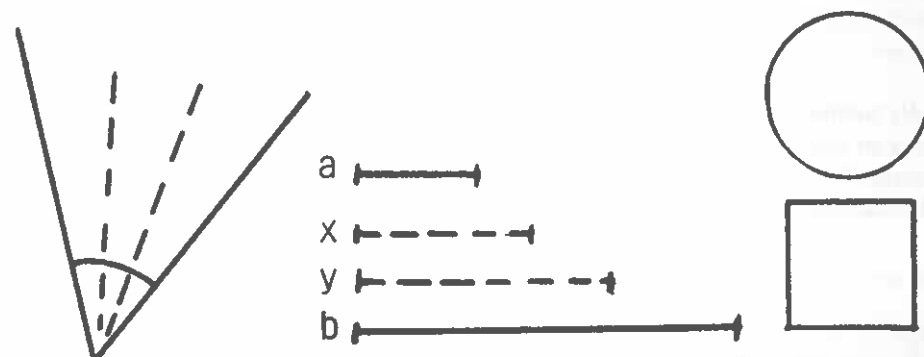
Met de genoemde voorbeelden van problemen kunnen we begrijpen dat de meetkunde zich omstreeks 1600 geconfronteerd zag met twee belangrijke methodologische problemen, namelijk:

1. Het ontbreken van een *analyse*, dat wil zeggen een vindmethode. Er was geen vaste leidraad om constructies te vinden in plaats van de ongestructureerde trucs, het geluk of de kunst die achter constructies zoals die van Clavius leek te steken.

2. De vraag hoe men moest construeren als het met passer en liniaal niet ging—zoals in het geval de 'klassieke problemen'.

Meetkundigen waren zich terdege bewust van het bestaan van deze twee vragen, ze zochten naar antwoorden en kwamen daarbij tot verschillende, soms tegenstrijdige uitkomsten.

Descartes' *Géométrie* kan het best begrepen worden als zijn eigen uitwerking van antwoorden op deze twee vragen, vanuit zijn filosofische overtuigingen. Het doel, de structuur en de inhoud van het boek worden grotendeels daarvoor bepaald. Het zoeken naar antwoorden leidde hem ook naar de analytische meetkunde, maar de weg daar naar toe was verre van rechtstreeks.

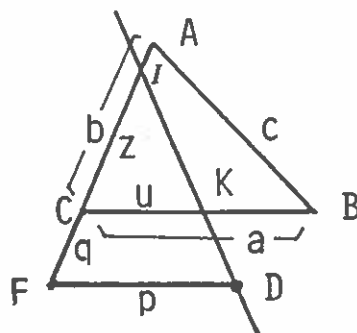


FIGUUR 3

(9) Laat ik eerst Descartes' ideeën over *analyse* bespreken. Descartes liet zien dat men meetkundige problemen kon analyseren met behulp van algebra en zo op methodische wijze een constructie kon vinden. De algebra werd gebruikt om een meetkundig probleem te vertalen in een algebraïsch probleem, namelijk een vergelijking in één onbekende. Ik kan het beste aan het voorbeeld van de driehoeksdeling laten zien hoe dat in zijn werk ging. Descartes zelf behandelde dat probleem niet, maar zijn handleiding voor analyse is zo duidelijk dat ik die stap voor stap kan toepassen. Descartes schreef voor dat men moest beginnen met aan te nemen dat het probleem al opgelost was en namen te geven aan bekende en onbekende lijnstukken in de figuur. Noem dus (zie Figuur 4) de gegeven lijnstukken $CA = b$, $CB = a$, $AB = c$, $DF = p$, $CF = q$, en de onbekende $CI = z$ en $CK = u$. Daarna moeten de gegeven en de vereiste relaties tussen die lijnstukken opgeschreven worden als vergelijkingen. Dat levert het volgende: omdat de driehoek CKI en FDI gelijkvormig zijn, geldt $(q + z) : p = z : u$, en dus

$$pz = u(q + z). \quad (1)$$

De verdeling in gelijke delen impliceert dat oppervlakte CAB : oppervlakte $CIK = 2 : 1$. Nu geldt (*Element VI-23*) dat oppervlakten van driehoeken die een hoek gemeen hebben een verhouding hebben gelijk aan de samengestelde verhoudingen van de zijden langs die hoek, dus $ab : uz = 2 : 1$, zodat $uz = \frac{1}{2}ab$.



FIGUUR 4

(2)

We hebben nu twee vergelijkingen in twee onbekenden. Descartes schreef voor dat in dat geval een van de onbekenden geëlimineerd moet worden zodat een vergelijking in één onbekende overblijft. We elimineren u en krijgen een kwadratische vergelijking in z :

$$z^2 = \frac{1}{2}ba \frac{z}{p} + \frac{1}{2}ba \frac{q}{p}; \quad (3)$$

als we nu z kennen kunnen we de gevraagde deellijn trekken. De afsluiting van de oplossing moet dus zijn dat we de wortel z van de vergelijking construeren. In ons geval kan dit ook; Descartes legt uit hoe men in het algemeen wortels van kwadratische vergelijkingen met passer en liniaal kan construeren en zijn procedé kunnen we rechtstreeks op de gevonden vergelijking (3) toepassen. Het is nu verrassend dat, als we dat doen (ik laat het hier om plaatsredenen achterwege), we vrijwel precies Clavius' constructie terugvinden!

(10) Het kan ook gebeuren dat het bij het elimineren niet lukt tot één vergelijking in één onbekende te komen omdat er meer onbekenden dan relaties zijn. In dat geval, zegt Descartes, heeft het probleem oneindig veel oplossingen en als het om de constructie van punten gaat vormen die punten een meetkundige plaats. Die oplossingen kan men afzonderlijk construeren door aan één of meer van de overgebleven onbekenden willekeurige waarden toe te kennen zodat men toch een vergelijking in één onbekende overhoudt en de constructie afhandelt als in het normale geval. In de *Géométrie* laat Descartes dit zien in het geval van het zogenaamde probleem van Pappus. Dat is een locus probleem[†] dat in het gebruikelijke geval tot een kwadratische vergelijking in twee variabelen leidt. Descartes toont aan dat de oplossingslocus dan een

[†] Het probleem is, modern weergegeven, als volgt: Er zijn k lijnen L_i in het vlak gegeven, $k = 2n$ of $k = 2n + 1$, $n \geq 2$. Noem $d_i(P)$ de afstand van een punt P tot de lijn L_i . Gevraagd wordt de meetkundige plaats (locus) der punten P waarvoor, voor een zeker getal a , geldt $d_1(P) \cdot d_2(P) \cdots d_n(P) = a d_{n+1}(P) \cdots d_k(P)$. Het bedoelde gebruikelijke geval betreft vier lijnen ($k = 4$); het werd al in de Griekse oudheid behandeld.

kegelsnede is en hij laat zien dat men, vanuit de vergelijking, de aard van de kegelsnede en zijn ligging in het vlak kan bepalen.

(11) In hoeverre was nu dit gebruik van algebra het antwoord op de methodologische vraag naar een methode voor de *analyse* van problemen? Descartes' regels leiden inderdaad, zonder trucs of verborgen slimmigheden naar een vergelijking en daarmee verwijderde hij heel wat mysterie uit de kunst van het probleemoplossen. Maar bij de stap van vergelijking naar constructie lag nog een groot probleem. Zolang de graad van de vergelijking niet hoger was dan 2 was de constructie van de wortels mogelijk met passer en liniaal. Maar wat te doen als men op een vergelijking van hogere graad uitkwam? Dat gebeurt bijvoorbeeld bij het probleem van de twee middelevenredigen. Als we daar volgens Descartes' voorschrift de vergelijking voor de eerste, x , van de twee middelevenredigen afleiden krijgen we

$$x^3 = a^2 b.$$

Die vergelijking is algebraïsch makkelijk oplosbaar, de oplossing is

$$x = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Maar die oplossing vertelt ons niets over hoe we die x moeten construeren. En als de graad van de vergelijking groter dan 4 is, ligt de zaak in zekere zin nog hopelozender, dan is er geen algemene algebraïsche formule meer voor de wortels, zodat we langs die weg zeker geen constructie van de wortel zullen vinden. De conclusie is dat de algebra *niet* een volledig antwoord levert op de vraag naar een analytische methode; wat nog ontbreekt is een methode voor het meetkundig construeren van wortels van hogere-graadsvergelijkingen. En het is ook duidelijk dat bij dit construeren de tweede methodologische vraag ook beantwoord moet worden: hoe te construeren als het met passer en liniaal niet kan.

(12) Intussen mogen we de waarde van Descartes' algebraïsche analyse voor probleem oplossen niet onderschatten; hij bracht inderdaad, zoals hij zich vanuit zijn filosofische interesse had voorgesteld, methode en ordening in het gebied. De methode is hierboven uitgelegd; de ordening hield in dat problemen die tot dezelfde, of dezelfde soort, vergelijkingen leidden gelijksoortig waren; in het bijzonder waren problemen welker vergelijkingen dezelfde graad hadden gelijksoortig. Met dit laatste gegeven kon Descartes een ordening van problemen die uit de Griekse wiskunde bekend was, preciseren en verfijnen. Dit alles sloot mooi aan bij Descartes' algemene filosofische ideeën over methode; in het hoofdwerk uit 1637, de *Discours* had hij bijvoorbeeld als een der onderdelen van de juiste methode aangegeven dat men het probleem dat men wil onderzoeken eerst opdeelt in de eenvoudigste onderdelen, dat men die door naamgeving ordent en hun onderlinge relaties inventariseert, om zo de helderste gedachtengang te vinden die voert van de gegevens tot het gevraagde.

Welnu, dat is precies wat in de meetkunde gedaan wordt door de nieuwe analyse met behulp van algebraïsche symboliek.

(13) Maar, zoals gezegd, algebra leverde niet een directe leidraad voor het resterende deel van het probleem oplossen: de constructie van de wortels van de vergelijking. Natuurlijk moest Descartes wel aangeven hoe hij zich dat voorstelde en in verband daarmee moest hij een antwoord geven op de tweede methodologische vraag die we hierboven genoemd hebben: hoe moet men construeren als het met passer en liniaal niet lukt? Die vraag was niet nieuw in Descartes' tijd. Al in de oudheid moet hij gesteld zijn, maar een eenduidig antwoord was er niet. Sommige meetkundigen stelden zich het gebruik van speciale instrumenten voor, andere construeerden met behulp van zekere krommen (we zullen hieronder zien wat dat betekende), weer andere kozen zekere basisconstructies die ze per postulaat mogelijk veronderstelden. Descartes moest dus een keus maken. Hij deed dat door de volgende regels op te stellen:

- * Constructies mogen uitgevoerd worden met cirkels en rechten (passer en liniaal) en zo nodig met hogere-orde krommen;
- * Maar niet met alle krommen.

Om duidelijk te maken wat hij bedoelde, behandel ik twee voorbeelden. Beide zijn oplossingen van het trisectie probleem; de eerste maakt gebruik van cirkel en parabool, Descartes heeft die zelf gevonden en achtte hem zeker geometrisch acceptabel; de tweede maakt gebruik van een spiraal en was volgens Descartes niet aanvaardbaar in de meetkunde. Ze zijn als volgt:

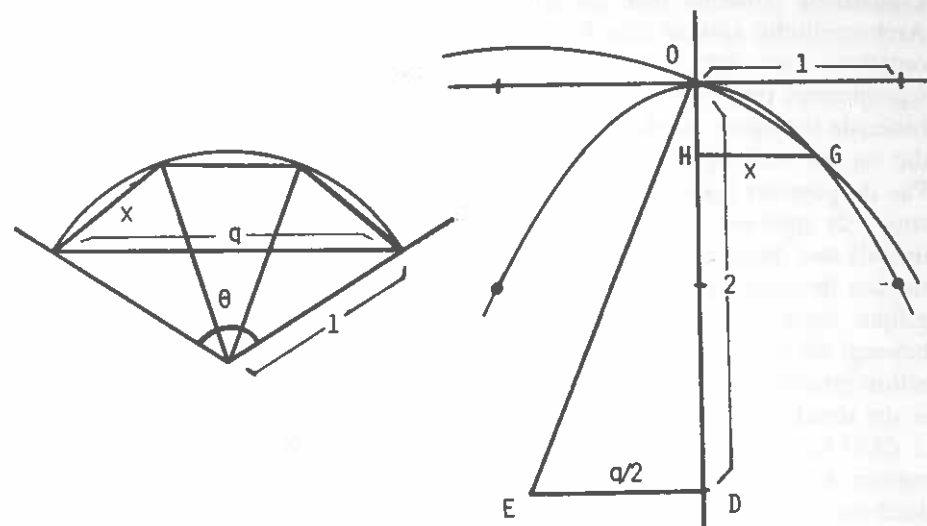
Probleem (trisectie): Gegeven (zie Figuur 5) een hoek θ ; gevraagd wordt die hoek in drie gelijke delen te delen, dus een hoek ter grootte $\theta/3$ te construeren. **Analyse:** Beschouw een cirkelboog met straal 1 binnen de gegeven hoek; omdat de hoek gegeven is, is ook de koorde q van die boog gegeven; noem de koorde van een derde deel van die boog x ; trek verdere lijnen als in de figuur. Uit de gelijkvormigheid van een aantal driehoeken valt nu eenvoudig af te leiden dat x voldoet aan de vergelijking

$$x^3 - 3x + q = 0.$$

Descartes past nu een door hem gevonden algemene constructie voor de wortels van derde-graads vergelijkingen toe, die in dit geval het volgende levert:

Constructie[†] (1) Trek twee onderling loodrechte assen door O . (2) Trek een parabool met verticale as, top in O en met 'latus rectum' gelijk aan 1. (Het opgeven van de waarde van de 'latus rectum' was de klassieke manier om een parabool nader te bepalen; in dit geval komt het er op neer dat de parabool gaat door de twee punten onder de horizontale as die op afstand 1 van beide

[†] *Géométrie* pp. 396-397.



FIGUUR 5

assen liggen.) (3) Markeer een punt D op de verticale as op afstand 2 beneden O ; trek door D naar links een loodlijn DE op de as ter lengte $q/2$; trek een cirkel met middelpunt E en straal EO . (4) De cirkel snijdt de parabool behalve in O in nog drie punten G (twee ervan vallen buiten de tekening); trek vanuit die punten loodlijnen GH op de as. (5) De loodlijn vanuit het punt G dat het dichtst bij O ligt op de rechter helft van de parabool is de gevraagde x (de andere twee loodlijnen hebben te maken met trisectie van $\theta \pm 2\pi$). (6) Gebruik nu x om de punten te vinden die de boog in hoek θ in drie gelijke delen delen en construeer zo de verdeling van θ . (Bewijs: De parabool heeft vergelijking $y = x^2$ (waarbij de positieve y -richting naar beneden wordt genomen); het valt eenvoudig na te rekenen dat de x -coördinaten van de snijpunten van die parabool met de geconstrueerde cirkel moeten voldoen aan de in de analyse afgeleide vergelijking.)

De essentiële stap in de constructie is het doorsnijden van de parabool met de cirkel. Hier zien we wat bedoeld werd met construeren door middel van krommen. Bij passer en liniaal constructies werkt men in wezen ook met krommen (namelijk rechten en cirkels); Descartes heeft hier dus dat arsenaal van constructiemiddelen uitgebreid met de parabool. Hij gaat er dan verder vanuit dat men parabolen kan trekken en hun snijpunten met cirkels en rechten kan bepalen. Zoals gezegd laat hij ook nog andere krommen toe, maar niet alle. Zo bijvoorbeeld niet de spiraal. Trisectie zou met behulp van de spiraal wel mogelijk zijn, namelijk als volgt:

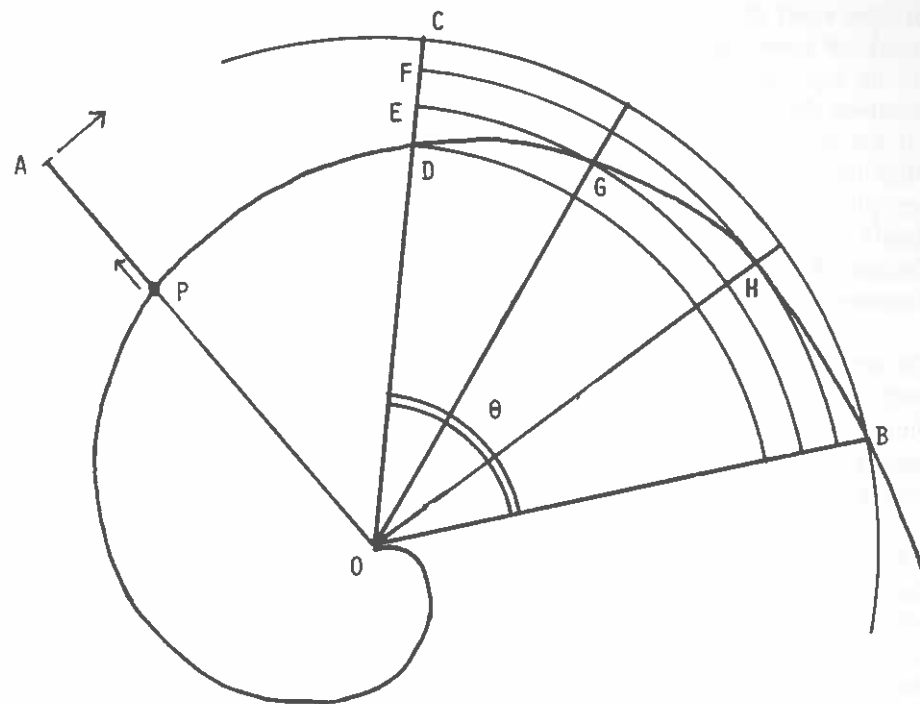
Constructie (trisectie met spiraal; teruggaand op Archimedes): (1) Trek een Archimedische spiraal (zie Figuur 6); d.w.z. trek een kromme die als volgt ontstaat: Een lijn OA roteert met vaste hoeksnelheid om het punt O ; tegelijkertijd beweegt op OA een punt P uniform van O naar A ; bij de gecombineerde beweging beschrijft P een kromme; dat is de spiraal; neem verder aan dat na één volledige omloop van OA , P vertrekkend uit O beland is in B . (2) Pas de gegeven hoek θ af vanaf OB , dus $\theta = \angle BOC$, waarbij $OC = OB$; OC snijdt de spiraal in D ; deel DC in drie gelijke delen (dat kan met passer en liniaal) met deelpunten E en F ; trek cirkels rond O met stralen OE en OF , zij snijden de spiraal in G en H ; trek OG en OH . (3) OG en OH delen $\angle \theta$ in drie gelijke delen. (Bewijs: Tijdens de beweging waardoor de spiraal ontstaat beweegt de straal uniform van OC naar OB in een zeker tijdsinterval; in dat zelfde interval beweegt P uniform van D naar C . Na $1/3$ van dat tijdsinterval is de straal op $1/3$ van hoek θ aangekomen en P op $1/3$ van CD . Dus is $\angle COG$ het derde deel van de gegeven hoek.)—Het is duidelijk dat op dezelfde manier de hoek ook in vier, vijf of een willekeurig ander aantal gelijke delen deelbaar is.

Welnu, deze laatste constructie, die al in de oudheid was bedacht, accepteerde Descartes niet, en hij was niet de enige die aan de meetkundige toelaatbaarheid ervan twijfelde. Daar was ook wel een reden voor: de constructie gaat ervan uit dat zo'n gecompliceerd proces als de combinatie van bewegingen die de spiraal beschrijft mogelijk is. Die combinatie van bewegingen is zozeer toegesneden op het probleem van hoekdeling dat men even goed direct zou kunnen postuleren dat trisectie, ja zelfs willekeurige hoekdeling, mogelijk was. Maar het is natuurlijk niet bevredigend om, als men de trisectie wil oplossen, simpelweg te postuleren dat de constructie mogelijk is en het daarbij te laten.

(14) Hoe dan ook, Descartes meende dat constructies zoals die met de spiraal (er waren meer van dergelijke constructies in omloop) niet toegelaten konden worden in de meetkunde. Hij zag zich daardoor gesteld voor twee nadere methodologische vragen. De eerste was:

Wat is het criterium voor aanvaardbaarheid van krommen als middel van constructie?

Dit is de demarcatievraag; het antwoord erop moet de grenzen van het toelaatbare in de meetkunde bepalen. Verder blijft, ook bij het gebruik van aanvaardbare krommen als constructiemiddel, de eis bestaan dat de eenvoudigste constructie gevonden moet worden, dat wil zeggen de constructie die de eenvoudigste toelaatbare krommen gebruikt—maar wat is eenvoudig? De tweede vraag was dan ook:



FIGUUR 6

Met welk criterium kan men bepalen of de ene kromme eenvoudiger is dan de andere?

Descartes' antwoord op de eerste vraag was:

Krommen zijn aanvaardbaar als zij beschreven worden door aanvaardbare combinaties van aanvaardbare bewegingen.

Dat antwoord verplaatst het probleem alleen maar: wat zijn aanvaardbare combinaties van aanvaardbare bewegingen? Descartes legt dat uit en geeft voorbeelden, onder meer de beschrijving van een zekere derde graads krommen die hij gebruikt als hulpmiddel bij de constructie van wortels van vergelijkingen; die kromme heeft later de naam 'Cartesische parabool' gekregen. De beschrijving is als volgt:

Constructie ('Cartesische parabool', bewegingsconstructie)[†] (1) In het grondvlak (zie Figuur 7) zijn twee assen getekend die elkaar loodrecht snijden in O ; op de horizontale as ligt links van O het punt D ; DA is een liniaal die kan

[†] *Géométrie*, pp. 335-338.

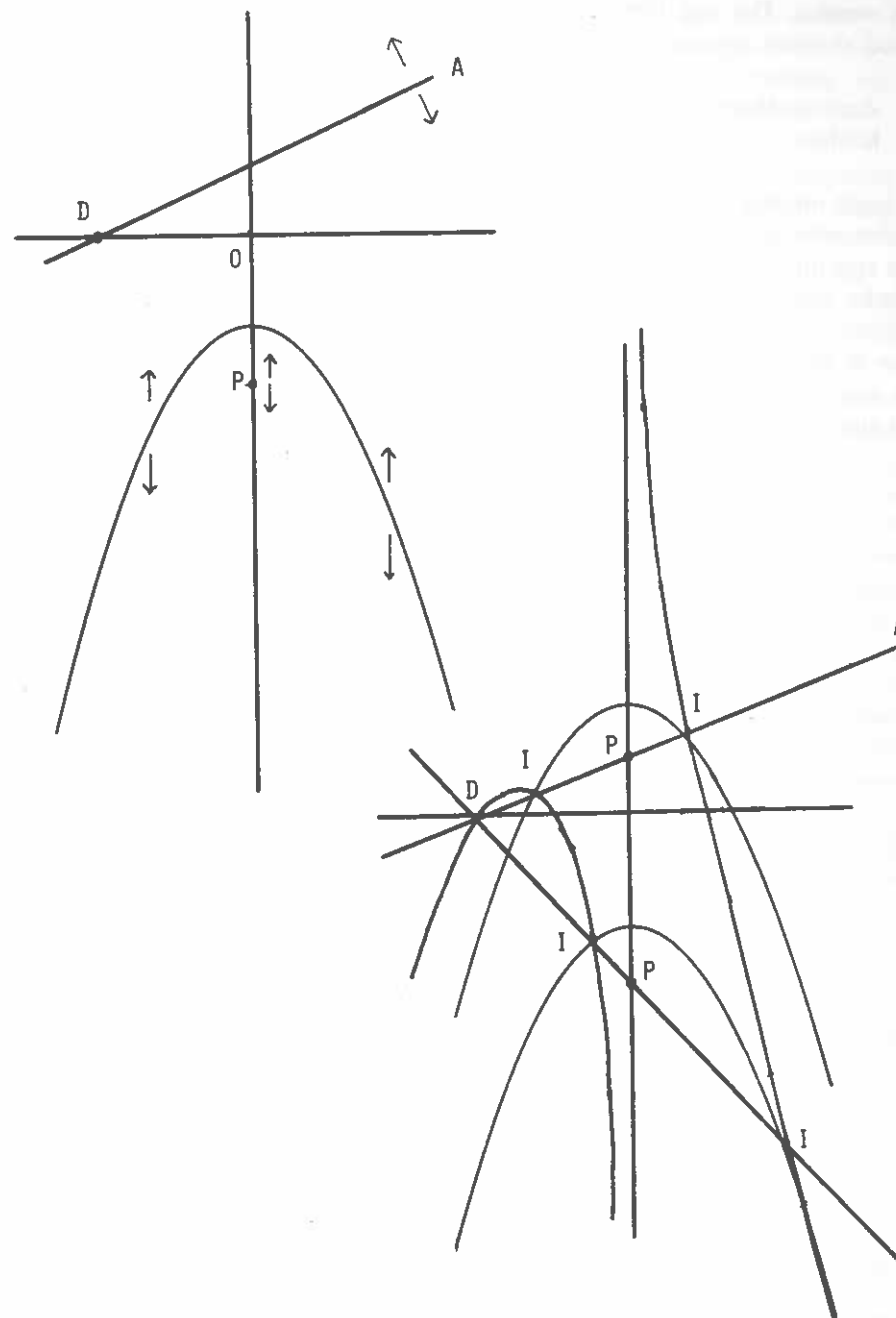
draaien rond D . (2) Op een vlak dat over het grondvlak kan schuiven, is een parabool getekend; op de as van de parabool ligt een punt P met vaste afstand tot de top; het vlak van de parabool kan op zo'n manier over het grondvlak schuiven dat de as van de parabool over de verticale as heen en weer beweegt. (3) De liniaal DA wordt langs het punt P gelegd en gedurende de beweging blijft de liniaal langs P gaan (men kan zich bijvoorbeeld voorstellen dat in P een pin is aangebracht die, als de parabool opwaarts beweegt de liniaal mee duwt); in ieder positie heeft de liniaal twee snijpunten I met de parabool. (4) Gedurende de beweging beschrijven de punten I een nieuwe kromme; dit is de kromme die Descartes bedoelt.

De bewegingen van de beide krommen (in dit geval de rechte lijn en de parabool) zijn volgens Descartes aanvaardbaar in de meetkunde, en hun combinatie is dat ook omdat, zoals hij zegt, de ene beweging de andere volledig bepaalt (de beweging van de parabool bepaalt die van de liniaal of omgekeerd).

(15) Deze keuze van Descartes heeft wel wat nadere verklaring. Ik zal een paar punten van commentaar geven. Een meetkundig probleem vraagt om een oplossing, een constructie, die exact en zeker is. Te meer moeten de constructiemiddelen die zekerheid in zich bergen. We mogen dus concluderen dat de aanvaardbare combinaties van bewegingen, zoals in het voorbeeld, naar Descartes' mening voldeden aan het criterium van zekerheid, namelijk dat men zich die beweging helder en duidelijk kan voorstellen. Inderdaad is dat de achtergrond van Descartes' keuze en hier zien we dan ook hoe zijn filosofische inzichten hem leidden bij keuzen in de wiskunde. Dit werpt ook nader licht op een van de in het begin genoemde puzzels; de afwezigheid van de 'lange ketens van redeneringen' in de *Géométrie*. In de zin van lange logische deducties zijn die er inderdaad niet, maar wel in de zin van reeksen opeenvolgende bewegingen die, met behoud van zekerheid, nieuwe krommen vormen uit eerder beschreven krommen en zo nieuwe constructiemiddelen leveren.

Is het Descartes nu met dit criterium voor aanvaardbaarheid van krommen gelukt de spiraal en de andere krommen, waarvan hij het gebruik niet aanvaardbaar vond, uit te sluiten? Inderdaad meent Descartes dat de bewegingscombinatie die de spiraal beschrijft niet aanvaardbaar is omdat in dat geval de ene beweging niet de andere op kenbare wijze bepaalt. De beide bewegingen die samen de spiraal beschrijven zijn namelijk verbonden door een relatie die op een of andere wijze afhangt van de verhouding π (zoals Descartes het zegt: de verhouding van omtrek en diameter van de cirkel). Dat is een verhouding tussen een krom en een recht lijnstuk en Descartes is ervan overtuigd dat die verhouding onkenbaar is—op die (voor ons niet meer overtuigende) basis sluit hij de spiraal uit.

Echter, Descartes' criterium, hoe overtuigend of weinig overtuigend het ook mag zijn, is niet erg bruikbaar; het is bij een gegeven kromme niet eenvoudig na te gaan of hij wel door een aanvaardbare bewegingscombinatie beschreven



FIGUUR 7

kan worden. Dat zag Descartes ook in en met een lang, ingewikkeld en niet geheel sluitend argument leidde hij af:

Aanvaardbare krommen zijn precies die, die algebraïsche vergelijkingen hebben.

Zo heeft hij dan de cartesische demarcatie van de meetkunde bereikt: Alleen algebraïsche objecten zijn toegelaten in de meetkunde. Aanvaardbare krommen zijn bijvoorbeeld de parabool, ellips, hyperbool, conchoïde,† Cartesische parabool; niet aanvaardbaar zijn de spiraal, de quadratrix en de cycloïde. Ik kan hier niet nader op de argumenten voor de demarcatie ingaan, maar ik moet wel benadrukken dat Descartes de zaak zeer serieus nam en dat zijn argumenten, hoewel niet sluitend, zeker gedegen, en ook vaak zeer interessant zijn.

(16) Er bleef nog de vraag naar eenvoud van de construerende krommen over: volgens welk criterium kan men vaststellen welke van twee krommen de meest eenvoudige is? Descartes gaf hierop het volgende antwoord: Een kromme is eenvoudiger naarmate de graad van zijn vergelijking lager is. Hij gaf weinig nadere argumenten daarvoor; hij koos zonder meer voor een algebraïsch criterium, wat, omdat het om een meetkundige eigenschap gaat—eenvoud van krommen in verband met hun rol als constructiemiddel—weinigt overtuigend is. De gang van zaken is een voorbeeld van een zekere ongemakkelijke spanning tussen algebraïsche en meetkundige elementen, die vaker in de *Géométrie* voorkomt.

(17) Die spanning tussen algebraïsche en meetkundige criteria mag een bezwaar zijn geweest, toch had Descartes' eindresultaat ook grote voordelen, want nu, nadat hij in al de eerder genoemde methodologische kwesties antwoorden had gegeven, beslissingen had genomen, nu was hij dan ook in staat om een duidelijke en heldere procedure te omschrijven voor het oplossen van meetkundige problemen. Die procedure was, schematisch aangegeven, als volgt:

(1) Herschrijf het probleem als een vergelijking.

De procedure daarvoor hebben we besproken aan de hand van het voorbeeld van de driehoeksdeling.

(2) Reduceer, zo nodig, die vergelijking tot een irreducibele vergelijking.

Dit heeft te maken met de standaardconstructies in punt (4) hieronder; als men niet eerst de vergelijking reduceert, komt men uit op een constructie met

† Zie voor de conchoïde en de cissoïde de bijdrage van J.A. van Maanen aan deze bundel.

een meer ingewikkelde kromme dan noodzakelijk is.

(3) Herschrijf die vergelijking, door middel van substituties, in een standaardvorm.

Het betreft hier lineaire substituties $x = y - a$ of $x = ay$; de substituties, en hun inversen, corresponderen met meetkundige constructies die met passer en liniaal uitgevoerd kunnen worden.

(4) Construeer de wortels van deze standaardvergelijking volgens standaardconstructies. Construeer met behulp van de gevonden wortels de oplossing van het probleem zelf.

Descartes werkte dit punt uit voor vergelijkingen van graad ≤ 6 . Ik zal op de standaardvormen der vergelijkingen hier niet ingaan. Wat de constructies betreft, die waren als volgt:

- (i) Voor vergelijkingen met graad 1 en 2: met rechten en cirkels.
- (ii) Voor vergelijkingen van graad 3 en 4: met een parabool, cirkels en rechten. (De boven behandelde constructie van de trisectie is een voorbeeld: de constructie voor vierde-graadsvergelijkingen was niet veel ingewikkelder.)
- (iii) Voor vergelijkingen van graad 5 en 6: met een Cartesische parabool, cirkels en rechten.

Verder ging Descartes niet; hij beweerde dat het principe nu wel duidelijk was en dat men de procedure zelf kon voortzetten voor hogere-graadsvergelijkingen. Als hij dat werkelijk dacht, onderschatte hij het probleem sterk. Veel zeventiende-eeuwse wiskundigen hebben zich beziggehouden met dit soort hogere-graadsconstructies; daarbij bleek dat Descartes' procedure niet zo vanzelfsprekend en in elk geval niet eenduidig voortzetbaar was.

De procedure voor het construeren levert een verklaring van een van de puzzels die we aan het begin noemden, de achtergrond van de algebraïsche theorie van vergelijkingen en hun wortels in de *Géométrie*. Als men precieser nagaat welke zaken Descartes daar behandelt† dan blijkt dat ze allemaal nodig zijn of voor de reductie bij stap (2) of voor het herschrijven van de vergelijking in standaardvorm bij stap (3).

(18) Ik zal het wat betreft de bedoeling en opzet van Descartes' *Géométrie* hierbij laten. Maar er moet nog wel iets gezegd worden over de analytische meetkunde, want de vraag rijst: waar is de analytische meetkunde in dit geheel? Waar is de equivalentie van kromme en vergelijking? Zoals ik de opzet en bedoeling van Descartes' *Géométrie* heb weergegeven is er weinig van

† Dit betreft het gedeelte van de *Géométrie* pp. 371-389.

analytische meetkunde te bekennen. Toch komt die equivalentie in het boek voor en wel op drie manieren. Allereerst bij de behandeling van locus problemen, dus problemen die oneindig veel oplossingen hebben en waarvan de oplossingen een meetkundige plaats, een locus, vormen. Die locus is een rechte of een kromme lijn en als men Descartes' procedure volgt, verkrijgt men de vergelijking (in twee variabelen) van die locus. Zoals boven vermeld liet Descartes aan het voorbeeld van het probleem van Pappus zien dat in het geval van kwadratische vergelijkingen de locus een kegelsnede is en hij toonde hoe men met behulp van de vergelijking de aard en de ligging van de kegelsnede kan bepalen. Ten tweede komt de equivalentie naar voren bij het demarcatieprobleem; Descartes zegt immers dat alleen die krommen acceptabel zijn in de meetkunde waarvan de vergelijkingen algebraïsch zijn; hij gebruikt hier dus de equivalentie van kromme en vergelijking. Ten derde is er een gedeelte van de *Géométrie* dat eigenlijk tamelijk buiten de algemene structuur van het boek valt. Hier geeft Descartes een methode aan om met behulp van de vergelijking raaklijnen aan een kromme te bepalen.[†] Hij gebruikt daarbij dat een kromme en een aan die kromme rakende cirkel twee samenvallende snijpunten moeten hebben zodat de vergelijking voor de x -coördinaten van die snijpunten twee samenvallende wortels moet hebben.

Men ziet dat deels op natuurlijke wijze, deels als zijlijn, het hoofdthema van de analytische meetkunde inderdaad in de *Géométrie* voorkwam; maar niet als centraal thema, veeleer als haast onverwacht resultaat van een programma dat primair was gericht op het oplossen van meetkundige constructieproblemen.

(19) Hoe komt het nu dat, hoewel de kerngedachte van de analytische meetkunde geen centrale plaats in het boek inneemt, de *Géométrie* toch als een van de belangrijkste beginpunten van die theorie aangemerkt kan worden? Dat komt omdat latere lezers van het boek zich vooral door de algebraïsche technieken lieten inspireren en weinig interesse toonden in de methodologische problemen die voor Descartes zo belangrijk waren geweest. Voor zover men deze methodologische zaken overnam, deed men dat dogmatisch maar zonder enthousiasme: Descartes had de gang van zaken bij meetkundig construeren vastgelegd en zo was dat. De technische vernieuwingen, met name het gebruik van algebra in de meetkunde, werden echter geestdriftig opgenomen en uitgewerkt en daarbij bleek zeer snel hoe vruchtbaar de relatie tussen kromme en vergelijking was.

De *Géométrie* is daarmee een voorbeeld van een zeer merkwaardig verschijnsel in de geschiedenis van de wiskunde, namelijk van een boek dat als het ware zijns ondanks invloed uitoefent. De filosofische en methodologische vragen die Descartes ertoe brachten het boek te schrijven werden nauwelijks overgenomen, de technieken die hij voor de beantwoording van die vragen ontwikkelde echter des te meer.

[†] Meer hierover in J.A. van Maanen's bijdrage aan deze bundel.

(20) Tot slot nog dit. De *Géométrie* is een groots boek. Dat zeg ik met enige nadruk omdat uit mijn bespreking de indruk achter zou kunnen blijven dat Descartes als wiskundige verstrikt was in een achterhaalde vraagstelling en daardoor een boek vol overbodige methodologie schreef. Zo is het niet. De *Géométrie* bevat naast methodologie ook veel knappe wiskunde, waarop ik nu niet uitvoerig ben ingegaan. Maar ik meen ook dat de dingen waarop ik hier de nadruk heb gelegd, vragen omtrent constructie die nu niet meer in de wiskunde worden gesteld, toch van belang zijn bij onze beoordeling van het boek. Zonder deze kant van het werk serieus te nemen zijn het doel, de opzet en een groot deel van de inhoud van de *Géométrie* niet te begrijpen. verder zijn Descartes' antwoord op die vragen, hoewel onvolledig en niet geheel sluitend, toch van grote intellectuele kwaliteit. Het was werkelijk een briljante geest die hier worstelde met zeer moeilijke vragen. Hoewel die vragen nu achterhaald lijken, kunnen we ons zeker realiseren dat ze in zijn tijd vanzelfsprekend waren en inderdaad beantwoord moesten worden. En we kunnen, door ons opnieuw in die vraagstelling te verdiepen, een briljante intellectuele prestatie zien en bewonderen.