

De 'constructie van vergelijkingen', een vergeten voorouder van de algebraïsche meetkunde.

DR H. J. M. BOS.

1. In Gabriël Cramer's (1704-1752) belangrijke boek *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* uit 1750 vinden we een hoofdstuk getiteld 'enkele opmerkingen over de meetkundige constructie van vergelijkingen'. Met 'constructie van vergelijkingen' bedoelde Cramer de meetkundige constructie van wortels van polynomiale vergelijkingen in één onbekende. Hij omschreef de daarbij gebruikelijke procedure als volgt¹:

Men kiest twee onbepaalde vergelijkingen (bedoeld is polynoomvergelijkingen in twee variabelen) zodanig dat, wanneer één van de variabelen uit deze twee vergelijkingen geëlimineerd wordt, de bepaalde vergelijking die overblijft na deze eliminatie, dezelfde is als de vergelijking die men moest construeren. Als men dan in één vlak ten opzichte van eenzelfde oorsprong de twee (kromme) lijnen beschrijft die deze onbepaalde vergelijkingen weergeven, en als men de ordinaten trekt vanuit alle punten waar deze twee lijnen elkaar ontmoeten, dan zullen die ordinaten gelijk zijn aan de wortels van de gegeven vergelijking.

De procedure is dus deze: Laat

$$H(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

en zij

$$H(x) = 0 \quad (2)$$

de 'te construeren' vergelijking. Men kiest nu twee polynomen $F(x, y)$ en $G(x, y)$ zó dat wanneer uit het stelsel

$$F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = 0 \quad (3)$$

de variabele y geëlimineerd wordt, precies de vergelijking (2) als resultante optreedt. Vervolgens tekent men in één vlak de kromme $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ met vergelijkingen (3) en men bepaalt hun snijpunten $(x_1, y_1), \dots, (x_s, y_s)$. De (georiënteerde) afstanden x_i van de snijpunten tot de y -as zijn dan de wortels van de vergelijking (2).

2. Het lijkt op het eerste gezicht een curieuze exercitie. Het tekenen van de krommen $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ en het vinden van hun snijpunten op het vel papier vereist in het algemeen benaderingstechnieken en is zo omslachtig dat directe benaderingsmethoden voor het vinden van de wortels van $H(x) = 0$ zeker sneller tot resultaat zouden leiden: zulke methoden waren ten tijde van Cramer zeker bekend. Praktisch nut voor het vinden van de wortels van vergelijkingen had de 'constructie van vergelijkingen' dus nauwelijks. Dat wisten de wiskundigen ook:

Christian von Wolff (1679-1754) schreef in zijn veelgebruikte *Elementa Matheseos* dat de constructies van vergelijkingen²:

in de praktijk nauwelijks nut hebben omdat de methode om wortels te benaderen beter voldoet. Men doet het echter als oefening van de scherpzinnigheid en om de oorsprong van vindingen te ontdekken.

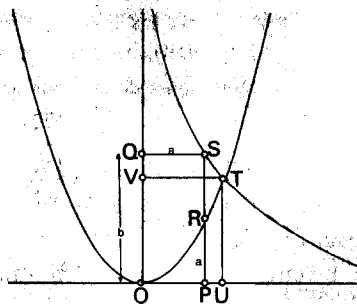
Toch werd de 'constructie van vergelijkingen' in de 17^e en de vroege 18^e eeuw zeer serieus genomen: Descartes, Sluse, de la Hire, l'Hôpital en Cramer wijdden er boeken of gedeelten van boeken aan: Fermat maakte er ruzie over met Descartes; Jakob Bernoulli, Newton en anderen namen stelling in controverses erover. Men kan zelfs zeggen dat in die periode de 'constructie van vergelijkingen' een kanonieke methode was voor het oplossen van vergelijkingen. De methode had nog het voordeel dat hij, in tegenstelling tot het oplossen met behulp van wortelvormen, ook gebruikt kon worden bij vergelijkingen van graad groter dan vier. Zodoende vormde de 'constructie van vergelijkingen' een belangrijke reden voor wiskundigen in de 17^e en 18^e eeuw om algebraïsche krommen en de ligging van hun snijpunten te bestuderen. De procedure is dus een van de wortels geweest waaruit de algebraïsche meetkunde is ontstaan. Kort na de publikatie van het boek van Cramer is de 'constructie van vergelijkingen' in de vergetelheid geraakt: de in wiskundige zaken doorgaans zeer uitvoerige *Encyclopédie* wijdde er nog slechts een paar regels aan.³

Dat maakt het onderwerp voor de historicus niet minder interessant: het is een tijdlang een belangrijk onderzoeksgebied geweest, en het vergeten raken van onderdelen van de wiskunde is ook een boeiend proces. Ik zal daarom in het volgende wat meer over de geschiedenis van de 'constructie van vergelijkingen' vertellen en iets zeggen over de vraag waarom men later de interesse in dit stuk wiskunde verloor.

3. Het 'construeren van vergelijkingen' (precieser: het construeren van wortels van vergelijkingen) is een meetkundig constructieprocédé toegepast op een algebraïsch probleem. Meetkundige constructieopgaven stammen uit de oudheid en Griekse wiskundigen hebben criteria opgesteld waaraan meetkundige constructies moesten voldoen. Zulke constructies moesten bij voorkeur uitgevoerd worden met behulp van passer en liniaal alleen. Lukte dat niet dan mochten andere instrumenten gebruikt worden (bijvoorbeeld een soort schuiflinialen) of, anders opgevat, er mochten andere krommen dan rechten en cirkels bij constructies gebruikt worden. Bijvoorbeeld werden dan kegelsneden of ook wel hogeregraadskrommen gebruikt.

Voorbeelden van gebruik van andere constructiemiddelen dan passer en liniaal (cirkel en rechte) zijn te vinden in Griekse constructies voor het probleem om tussen twee gegeven grootheden a en b twee 'middenproportionalen' te vinden, dat wil zeggen twee grootheden x en y zó dat

$$a : x = x : y = y : b. \quad (4)$$



Figuur 1

Zo is er bijvoorbeeld een constructie, toegeschreven aan Menaechmus (fl. ca. 350 v.C.) die als volgt verloopt (zie fig. 1): Beschouw een rechthoekig assenkruis: kies $OP = a$ op de horizontale as, $OQ = b$ op de vertikale as en kies punten R en S zó dat $PR = a$, $PS = b$ en $QS = a$. Trek een parabool door R met vertikale as en top in O. Trek een hyperbool door S met de assen als asymptoten. Bepaal het snijpunt T van parabool en hyperbool en trek loodlijnen TU en TV. TU en TV zijn de gevraagde middenproportionalen.

Dat het resultaat juist is, is makkelijk in te zien: de parabool heeft vergelijking

$$ay = x^2 \quad \text{of} \quad a : x = x : y \quad (5)$$

de hyperbool

$$xy = ab \quad \text{of} \quad a : x = y : b. \quad (6)$$

Hun snijpunt, $x = VT$, $y = UT$, voldoet dus aan

$$a : x = x : y = y : b. \quad (7)$$

Het essentiële van de constructie is dat het blijkbaar mogelijk verondersteld wordt de beide kegelsneden te trekken en hun snijpunt te bepalen. Met andere woorden, de kegelsneden worden gebruikt als constructiemiddelen, als generalisaties van passer en liniaal (of liever, van de met passer en liniaal getrokken cirkels en lijnen).

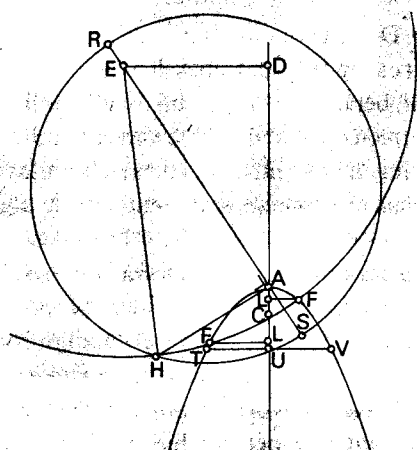
De Griekse wiskunde kende methoden om met passer en liniaal problemen op te lossen die equivalent zijn met kwadratische vergelijkingen. Verder kon men met doorsnijding van kegelsneden of andere krommen een aantal problemen oplossen die equivalent zijn met derdegraadsvergelijkingen. Voorbeelden daarvan zijn het bovengenoemde probleem van de twee middenproportionalen (immers de gevraagde x is wortel van de vergelijking $x^3 = a^2b$) en het probleem van de driedeling van de hoek. In hoeverre de Grieken de relatie tussen de geometrische problemen en de algebraïsche vergelijkingen hebben gezien, is een omstreden zaak.

Het is de verdienste van de middeleeuwse Arabische wiskundigen geweest, die

In de Renaissance werden door Italiaanse wiskundigen algebraïsche oplossingsregels met behulp van wortelvormen gegeven voor derde- en vierdegraadsvergelijkingen. Dat wil zeggen, er werden voorschriften gegeven (in moderne termen vertaald zijn het formules) waarmee wortels van derde- en vierdegraadsvergelijkingen bepaald konden worden en waarbij het mogelijk verondersteld werd, uit getallen vierkantswortels of derdemachtswortels te trekken.

De andere manier was om vergelijkingen te zien als meetkundige problemen, en meetkundige constructies voor de wortels te vinden. Bij deze constructies werd het toelaatbaar geacht om andere hulpmiddelen dan passer en liniaal te gebruiken. De 17^e- en 18^e-eeuwse ‘constructie van vergelijkingen’ vormt nu de uitwerking van deze visie op vergelijkingen. De centrale figuur in deze uitwerking is René Descartes (1596-1650) geweest.

5. In 1619 of 1620 bestudeerde Descartes het probleem van de constructie van derde- en vierdegraadsvergelijkingen. Hij vond dat de wortels van die vergelijkingen altijd met behulp van kegelsneden te construeren zijn (dat was toen geen nieuw resultaat) en hij toonde in het bijzonder aan dat de constructie steeds



Figuur 2

mogelijk was met een cirkel en een parabool (dat was wel nieuw). Descartes publiceerde de constructie in zijn *Géométrie* (1637).⁴ Hij ging als volgt te werk. Uit een gegeven vierdegraadsvergelijking

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (8)$$

verwijderd hij eerst de derdegraadsterm door als nieuwe onbekende in te voeren $z = x + \frac{1}{4}a$; in de resulterende vierdegraadsvergelijking in z komt geen term met z^3 voor. Hij schrijft de vergelijking nu als

$$z^4 = \pm pz^2 \pm qz \pm r \quad (9)$$

met p, q en r positief of 0, en hij beschouwt de gevallen die optreden naar gelang de verdeling van de tekens $+$ en $-$. Als voorbeeld geef ik de constructie van Descartes voor het geval

$$z^4 + pz^2 = qz + r. \quad (10)$$

Zie fig. 2. Trek de parabool TAV met verticale as, top A en $AU = TU = UV = 1$. Neem $AC = \frac{1}{2}$. Neem langs de as $CD = \frac{1}{2}p$ en loodrecht daarop $DE = \frac{1}{2}q$. Trek AE en neem, langs AE, $AR = r$, en in de andere richting $AS = 1$. Trek een cirkel met middellijn RS. Trek AH loodrecht op AE en bepaal het snijpunt H met de cirkel. Trek HE. Trek een cirkel met middelpunt E en straal HE. Bepaal de snijpunten F van de cirkel met de parabool. Trek loodlijnen FL uit die snijpunten op de as. De lengten FL zijn dan de wortels van de vergelijking. Ik laat het aan de lezer over te controleren dat de constructie klopt en na te gaan wat er algebraïsch en meetkundig achter zit. Het gaat mij om de constructieprocedure zelf, die een goed voorbeeld vormt van wat Descartes verstond onder de meetkundige constructie van wortels van vergelijkingen.

6. De *Géométrie* van Descartes uit 1637 vormt het begin van de analytische meetkunde. Descartes legde in dat boek het verband uit tussen krommen en hun vergelijkingen. Hij beperkte zich daarbij tot algebraïsche vergelijkingen – hij meende zelfs dat krommen die, ten opzichte van een rechte lijnig assenstelsel, geen algebraïsche vergelijkingen hebben, niet in de meetkunde thuis horen. Door deze beperking kan de *Géométrie* ook als startpunt van de algebraïsche meetkunde worden opgevat.

Het is nu merkwaardig dat op de achtergrond van de *Géométrie* het probleem van de 'constructie van vergelijkingen' een essentiële rol speelde. De hoofdgedachte van het werk was namelijk deze: Iedere meetkundige constructieopgave moet eerst vertaald worden tot een algebraïsche opgave, namelijk het oplossen van een vergelijking. Daarna moeten de wortels van die vergelijking meetkundig geconstrueerd worden. Dat laatste moet geschieden door het vinden van twee zo

eenvoudig mogelijke construerende krommen, waarvan de snijpunten de gevraagde wortels leveren, precies op de manier zoals de parabool en de cirkel de wortels voor de vierdegraadsvergelijking leveren. Bij het vinden van de zo eenvoudig mogelijke construerende krommen kan, zo liet Descartes zien, de algebra nuttig zijn, maar het doel bleef meetkundig: het tekenen van de construerende krommen en het vinden van de snijpunten en daarmee de wortels.

Dit is het programma voor de meetkunde dat Descartes uiteenzette in zijn *Géométrie*. Hij gaf daarin ook nieuwe resultaten in de richting die dat programma aangaf. In het bijzonder gaf Descartes aan, hoe wortels van zesdegraadsvergelijkingen (en daarmee ook van vijfdegraadsvergelijkingen) geconstrueerd konden worden met behulp van een cirkel en een speciale derdegraadskromme.

Het 'researchprogramma' dat Descartes hiermee voor zijn navolgers uitstippelde, was nu duidelijk: dergelijke constructies te vinden voor vergelijkingen van willekeurig hoge graad. Dit is dan ook de 'constructie van vergelijkingen' waaraan we Cramer een hoofdstuk hebben zien wijden.

7. Het researchprogramma heeft aanleiding gegeven tot vele discussies, speciaal over de vraag wat verstaan moest worden onder 'zo eenvoudig mogelijke' construerende krommen. Ik zal uit die discussies één punt naar voren brengen, dat te maken heeft met eliminatietheorie en snijpunten van krommen.

Descartes had aangegeven dat de construerende krommen $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ voor een vergelijking $H(x) = 0$ zo eenvoudig mogelijk moesten zijn, en hij had gezegd dat dat in elk geval inhield dat de krommen zo laag mogelijke graad moesten hebben. Nu laat dat voor $H(x)$ van lage graad nog een grote vrijheid van keuze. Dat blijkt wel uit de vele manieren waarop men een gegeven vierdegraadsvergelijking met kegelsneden (tweedegraadskrommen) kan construeren. Die vele manieren vormden een vaak beschreven onderwerp in algebraboeken uit de 17^e eeuw. Maar het algemene probleem om bij gegeven $H(x) = 0$ van graad n de construerende krommen van laagst mogelijke graad te vinden is niet een triviaal probleem. Ik zal in de volgende het werk van een aantal 17^e- en 18^e-eeuwse wiskundigen over dit probleem bespreken.

8. Pierre de Fermat (1601-1665) was de eerste die, in reactie op de *Géométrie* van Descartes, een algemene constructiemethode voor hogeregraadsvergelijkingen gaf. Hij had (ten onrechte overigens) het idee opgevat dat Descartes met zijn methoden niet meer kon bereiken dan het construeren van een n^e -graadsvergelijking met een kromme van de tweede en een van de $(n - 2)^e$ graad. In een geschrift⁵ uit ca. 1643, dat veel kritiek op Descartes bevatte, liet Fermat zien dat het beter kon: hij gaf een methode waarmee, naar zijn mening, ieder $(2n)^e$ -graadsvergelijking met twee krommen van graad n te construeren is. Hij ging als volgt te werk. (Ik moderniseer de notatie hier, Fermat gebruikte andere letters en werkte niet met indices: ook gebruikte hij geen algemene functiesymbolen.)

Laat

$$x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \quad (11)$$

de gegeven vergelijking zijn. Fermat zegt dat daaruit de term a_1x verwijderd kan worden. Hij legt niet uit hoe, maar hij verwijst naar Viète. Nu kan door een substitutie

$$w = \frac{2na_0x}{2na_0 + a_1x} \quad (12)$$

uit (11) een $(2n)$ -graadsvergelijking in w afgeleid worden, waarin de lineaire term ontbreekt: deze methode komt inderdaad bij Viète voor. We nemen dus aan dat de vergelijking geschreven kan worden als

$$H(x) = A \quad (13)$$

met

$$H(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_2x^2. \quad (14)$$

Fermat kiest nu als eerste construerende kromme

$$F(x, y) = \sqrt{A} \quad (15)$$

met

$$F(x, y) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_2x^2 + b_1xy, \quad (16)$$

en schrijft voor dat de b_i zó bepaald moeten worden dat in

$$H(x) - [F(x, y)]^2 \quad (17)$$

de termen met x^{2n} , x^{2n-1} , ..., x^{n+2} wegvallen. Dat kan inderdaad, zoals men door invullen ziet. Verder zijn $H(x)$ en $[F(x, y)]^2$ beide deelbaar door x^2 , zodat

$$x^{-2}\{H(x) - [F(x, y)]^2\} = 0 \quad (18)$$

een kromme van graad $(n-1)$ is. Fermat kiest nu deze kromme als tweede construerende kromme. Inderdaad geldt in de snijpunten van deze twee krommen dat

$$H(x) - [F(x, y)]^2 = 0 \quad \text{en} \quad [F(x, y)]^2 = A, \quad (19)$$

en dus

$$H(x) = A. \quad (20)$$

De x -coördinaten van de snijpunten zijn dus wortels van de gegeven vergelijking. Fermat laat zich over het bestaan van die snijpunten niet uit, evenmin over het probleem wat te doen als A negatief is. Ook schijnt hij niet gezien te hebben dat voor zijn tweede kromme de graad tot $n - 1$ teruggebracht kan worden: in zijn voorbeelden bepaalt hij de b_i slechts zo ver, dat de graad n bereikt wordt.

9. Het geschrift van Fermat circuleerde in manuscript onder wiskundigen (het werd pas in 1679 gedrukt). Een van de wiskundigen die het kende was Philippe de la Hire (1640-1718). Van hem verscheen ook in 1679 een algemene verhandeling over de constructie van vergelijkingen⁶. Hij vermeldt daarin het resultaat van Fermat, maar gaat zelf anders te werk. Uit de gegeven n^e -graadsvergelijking verwijderd hij eerst (door substitutie $w = x + a_{n-1}/n$) de tweede term. Hij neemt dus aan dat zijn vergelijkingen steeds de vorm hebben

$$x^n + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0. \quad (21)$$

Hij kiest nu voor de eerste construerende kromme

$$y = x^k \quad (22)$$

voor zekere k , en substitueert deze in de vergelijking: het resultaat is de vergelijking voor de tweede construerende kromme. Bijvoorbeeld voor de 16^e-graadsvergelijking levert dit het volgende op:

$$x^{16} + a_{14}x^{14} + \dots + a_1x + a_0 = 0, \quad (23)$$

$$\mathcal{F}: y = x^4, \quad (24)$$

$$\mathcal{G}: y^4 + a_{14}y^3x^2 + a_{13}y^3x + \dots = 0. \quad (25)$$

Hij vindt dus construerende krommen van graad vier en vijf – een 'beter' resultaat dan dat van Fermat, die hier krommen van graad acht en zeven zou hebben gevonden. Merk op dat het verwijderen van de tweede term voordelig is: was dat niet gebeurd dan zou voor $\mathcal{G}$ een zesdegraadskromme zijn gevonden.

De la Hire gaf een tabel van wat hij met deze aanpak bereiken kon (zie Tabel 1). (De la Hire verhoogde, zo nodig, de graad van een vergelijking door deze met x of x^2 te vermenigvuldigen: dat was een veel toegepaste methode. Het resultaat voor graad 17 bijvoorbeeld bereikte hij door eerst de vergelijking tot graad 18 op te hogen en dan $y = x^3$ te substitueren.) Hij zag echter geen systeem in de tabel. Wel gaf hij nog aan dat hij voor speciale vergelijkingen, namelijk die van de vorm

$$x^n = a$$

(26)

betere resultaten kan bereiken. Die resultaten staan in Tabel 2.

Hierin was wel een systeem te ontdekken: na de eerste regel staan links de getallen $(p - 1)p + 1$ t/m p^2 , respectievelijk $p^2 + 1$ t/m $p(p + 1)$, en rechts staan p en p , respectievelijk p en $p + 1$.

Tabel 1 (de la Hire)

graad van de vergelijking	graden van de construerende krommen
1, 2	1 en 2
3, 4	2 en 2
5, 6	2 en 3
7, 8, 9	3 en 3
10, 11, 12	3 en 4
13, 14, 15	3 en 5
16	4 en 5
17, 18	3 en 6
19, 20	4 en 6

Tabel 2 (de la Hire)

graad van de vergelijking	graden van de construerende krommen
1, 2	1 en 2
3, 4	2 en 2
5, 6	2 en 3
7, 8, 9	3 en 3
10, 11, 12	3 en 4
13 t/m 16	4 en 4
17 t/m 20	4 en 5
21 t/m 25	5 en 5
26 t/m 30	5 en 6
31 t/m 36	6 en 6
37 t/m 42	6 en 7
43 t/m 49	7 en 7
50 t/m 56	7 en 8
57 t/m 64	8 en 8
etc.	

10. De volgende wiskundige die zich uitgebreid met het probleem van constructie van vergelijkingen bezig hield, was Guillaume Francois de l'Hôpital (1661-1704). In een in 1707 postuum verschenen boek⁷ over kegelsneden besprak hij de 'constructie van vergelijkingen'. Hij sloot aan op het resultaat van de la Hire en beweerde dat de graden der construerende krommen zoals in Tabel 2 voor algemene vergelijkingen te verkrijgen zijn. Dat wil dus zeggen dat voor vergelijkingen van graad p^2 construerende krommen te vinden zijn van graad p , en dat voor vergelijkingen van graad $p(p + 1)$ construerende krommen te vinden zijn van graad p en $p + 1$. (Voor de tussenliggende graden verhoogt men de graad eerst tot p^2 of $p(p + 1)$ door met een macht van x te vermenigvuldigen.) Een volledig bewijs van deze bewering gaf l'Hôpital niet. Hij gaf voor vergelijkingen tot en met graad 15 expliciet aan hoe het moest. Voor hogeregraadsvergelij-

kingen gaf hij een argument dat wij herkennen als een dimensieoverweging: Hij zei bijvoorbeeld dat als

$$F(x, y) = 0 \quad \text{en} \quad G(x, y) = 0 \quad (27)$$

vergelijkingen zijn van de vierde en de vijfde graad respectievelijk, de vergelijking in x die ontstaat door y te elimineren van de 20^e-graad zal zijn. Hij merkte op dat het aantal vrij te kiezen coëfficiënten in F en G groter is dan het aantal coëfficiënten in een 20^e-graadsvergelijking in x . Hij concludeerde daaruit dat het door geschikt kiezen van de coëfficiënten in F en G mogelijk moet zijn iedere 20^e-graadsvergelijking als resultaat van de eliminatie te verkrijgen. Uit zijn woorden is duidelijk dat hij dit tel-argument ook voor hogeregraadsvergelijkingen wilde laten gelden.

Blijkbaar nam l'Hôpital als vanzelfsprekend de stelling aan die later bekend is geworden als de stelling van Bezout, namelijk dat bij twee polynomen $F(x, y)$ en $G(x, y)$ van graad p en q respectievelijk, een resultante $H(x)$ te vinden is van graad pq . Gedurende de 18^e eeuw groeide het besef van het belang van deze stelling – vooral in verband met het bepalen van het aantal snijpunten van algebraïsche krommen – en van de noodzaak de stelling ook te bewijzen. Er zijn gedeeltelijke bewijzen en bewijspogingen geweest van MacLaurin en Cramer, voordat Bezout tenslotte in 1779⁸ een bewijs publiceerde dat in elk geval in principe goed was.

Verder postuleerde l'Hôpital ook een soort omkering van de stelling van Bezout, namelijk dat iedere pq -graadspolynoom in x ook als resultante voorkomt van twee polynomen in x en y van graad p en q respectievelijk. Het tel-argument dat hij daarvoor gaf is overigens onvoldoende, het bewijst alleen dat de dimensie van de ruimte der paren polynomen in twee variabelen met graden p en q respectievelijk, groter is dan de dimensie van de ruimte der polynomen in x van graad pq .

11. De situatie omstreeks 1710 werd verder verlevendigd door Michel Rolle (1652-1719) die in een artikel in 1708⁹ wees op een aantal dingen die in de door de la Hire en l'Hôpital gesuggereerde aanpak mis kunnen gaan. Hij liet aan voorbeelden zien dat men soms krommen $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ vindt met imaginaire snijpunten, zodat het met een reële wortel x_0 van $H(x) = 0$ corresponderend snijpunt helemaal niet op het papier verschijnt. Ook gaf hij voorbeelden waarin bij het kiezen van de F en G wortels insluipen of weer verdwijnen: kortom, hij zaaide twijfel, waarop weer door anderen, de la Hire zelf en Jakob Hermann, gereageerd werd.

12. Men zou dus zeggen: Nu wordt het spannend, er liggen moeilijke problemen open en er is interessante kritiek op bestaande methoden – hoe zou het verder gaan?

Het antwoord valt tegen. Het lijkt dat de wiskundigen precies op dit punt hun interesse in het probleem van 'constructie van vergelijkingen' verloren hebben. De discussie over Rolle's bezwaren was niet steekhoudend en bij Cramer vinden we nog wel de tabel voor de graadkeuze voor de construerende krommen, maar een poging om te bewijzen dat het ook kán, ontbreekt en uit zijn presentatie blijkt dat hij niet werkelijk op het probleem doorgedacht heeft. En inderdaad verdween na Cramer het hele probleemcomplex in de vergetelheid, als het ware zó dat de wiskundigen nèt de interessante problemen misten. In het bijzonder is de door l'Hôpital gepostuleerde omkering van de stelling van Bezout allerm minst triviaal. Ik weet niet of er een bewijs of tegenbewijs van bestaat.¹⁰

13. Het ligt voor de hand je dan af te vragen hoe het kon gebeuren dat juist op zo'n interessant lijkend punt de interesse in de problemen verloren gaat. Over die vraag valt het volgende te zeggen. De in onze ogen interessante vragen zijn *theoretische* vragen: existentie van polynomen F en G die een voorgeschreven H als resultante hebben, het vóórkomen van niet-reële snijpunten. Voor de 17^e-eeuwse en 18^e-eeuwse wiskundigen was echter de 'constructie van vergelijkingen' niet een *theorie* maar een *methode* om wortels te vinden. In de manier waarop men over deze problematiek schreef, klinkt dit door: men stelt zich voor dat de krommen werkelijk getrokken worden op papier, men denkt aan mallen etc. En het vinden van de krommen $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ wordt gepresenteerd als tot op zekere hoogte trial and error: lukt het met de ene substitutie niet, probeer dan een andere. Met dit uitgangspunt had men minder oog voor de algemene problemen achter de methoden.

Daarbij kwam, als vermoedelijk belangrijker oorzaak van het verloren gaan van de interesse, het feit dat de methode zijn zin begon te verliezen. In oorsprong was het een constructiemethode, een meetkundig procédé, het tekenen van krommen, het bepalen van snijpunten. Maar, vooral voor hogeregraadskrommen verdwijnt het meetkundige aspect snel uit het gezicht: de manipulaties (substitutie, eliminatie) zijn algebraïsch, de gevonden krommen zijn nauwelijks construeerbaar. Pogingen om in zulke gevallen te zoeken naar eenvoudige, makkelijk te tekenen of anderszins kanonieke krommen leverden geen overtuigend resultaat (dat is een apart verhaal waarop ik hier niet inga). Maar als zuiver algebraïsche bezigheid, die het intussen geworden was, heeft de 'constructie van vergelijkingen' geen zin – men verkrijgt daarmee niet de wortels van de gegeven vergelijking. Hierin moet men vooral de reden voor het verlies van interesse voor de 'constructie van vergelijkingen' zoeken. Dat proces maakt daarmee deel uit van een veel algemener proces dat in de 18^e-eeuwse wiskunde speelde, namelijk de ontgeometrisering van de wiskunde, het geleidelijk loslaten van geometrische beschouwingswijzen en probleemstellingen en de overgang naar meer analytische aanpak van wiskunde.

14. Toch heeft de 'constructie van vergelijkingen' gedurende iets meer dan een

eeuw de aandacht van wiskundigen gericht op eliminatietheorie en snijpunten van krommen, en deze interesse is gebleven en vormde de kern waaromheen zich de algebraïsche meetkunde verder ontwikkelde. Het leek me daarom goed deze vergeten voorouder van de algebraïsche meetkunde in de herinnering terug te roepen.

Noten

1. G. Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève, 1750: i.h.b. Ch. IV 'Quelques remarques sur la construction géométrique des égalités', pp. 80-118, het geciteerde gedeelte op p. 80.
2. C. v. Wolff, *Elementa Matheseos*, editie Genève 1740-1743, vol. I, p. 510.
3. *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, Paris, 1751-1772, art. 'construction'.
4. R. Descartes, *Géométrie*, Leiden 1637: de constructie van derde- en vierdegraadsvergelijkingen met cirkel en parabool wordt behandeld op pp. 389-397. Er is een facsimile editie van de *Géométrie* met engelse vertaling: D. E. Smith & M. L. Latham (eds.) *The geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition* New York (Dover publ.) 1954.
5. P. de Fermat, 'De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas et unicuique problematum generi proprie convenientes dissertatio tripartita' (geschreven ca. 1643, gedrukt 1679) in *Oeuvres de Fermat* (ed. P. Tannery & C. Henry), Paris 1891-1912, vol. I pp. 118-131. In dit stuk komt de beroemde uitspraak voor dat alle getallen van de vorm $2^{2^n} + 1$ priemgetallen zijn. Het is interessant dat Fermat deze uitspraak deed in verband met voorbeelden van vergelijkingen die met krommen van zeer lage graad te construeren zijn in de zin van de 'constructie van vergelijkingen'.
6. Ph. de la Hire, *Nouveaux elemens des sections coniques, les lieux geometriques, la construction, ou effection des equations*, Paris 1679, ik bespreek i.h.b. het gedeelte pp. 415-433.
7. G. F. de l'Hôpital, *Traité analytique des sections coniques*, Paris 1707, i.h.b. Ch. IX 'De la construction des égalités', pp. 291-361 van de tweede ed. Paris 1720: het besproken tel-argument is te vinden op p. 346.
8. E. Bezout, *Théorie générale des équations algébriques*, Paris 1779.
9. M. Rolle, 'Eclaircissemens sur la construction des égalitez', *Mém. Acad. Roy. Sci.* (Paris) 1708, pp. 339-365.
10. Ik houd me aanbevolen voor aanwijzingen van lezers op dit punt.

Wie zich in 1981 wenst te onderwerpen aan het examen ter verkrijging van de akte wiskunde m.o. A of B, dient zich **vóór 1 mei 1981** aan te melden door storting van f 60,- op postrekening 172007 ten name van de voorzitter van de examencommissie wiskunde m.o. te 's-Gravenhage met vermelding van de **volledige naam** en het **adres** van de kandidaat en met de aanduiding **m.o. A** of **m.o. B**. Na 1 mei 1981 ontvangen de aangemelde kandidaten nadere instructies van de examencommissie. Behalve in de hierna te noemen uitzonderingsgevallen zullen alle kandidaten worden geëxamineerd volgens de nieuwe programma's, zoals die zijn omschreven in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde jg 63 blz. 86-93. Men kan ze verkrijgen door storting van f 2,- op de bovengenoemde postrekening met vermelding 'examenprogramma'.

Het schriftelijk gedeelte van het A-examen wordt afgenomen op 18 en 19 augustus 1981, dat van het B-examen op 20 en 21 augustus 1981.

Voltooiing van het examen in oude stijl is slechts mogelijk voor:

1 A-kandidaten die in 1979 of 1980 hebben deelgenomen aan het examen analyse oude stijl en aan het examen projectieve en beschrijvende meetkunde en voor een van deze vakken een vrijstelling behaalden;

2 B-kandidaten die in 1979 of 1980 hebben deelgenomen aan het examen meetkunde oude stijl en beschikken over geldige vrijstellingen voor ten minste een van de beide andere vakken.

Ten aanzien van het examen voor de akte m.o. A volgens het nieuwe programma heeft de minister van Onderwijs en Wetenschappen op 10 januari 1978 bepaald, dat bij het schriftelijk gedeelte het gebruik van rekentuig (rekenliniaal of elektronische zakrekenmachine) is toegestaan, maar dat elektronische rekenapparatuur tijdens het examen niet kan worden opgeladen.

Inhoud 68/4 (thema: 'Algebraïsche meetkunde')

PROF. DR. J. H. DE BOER, Complex-projectief versus reëel-affien
DR. H. J. M. BOS, De 'constructie van vergelijkingen', een vergeten voorouder van de algebraïsche meetkunde

PROF. DR J. P. MURRE, Algebraïsche krommen

DR J. SIMONIS, Cremona-transformaties van het projectieve vlak

Boekbespreking

Adressen van de auteurs van de artikelen op blz. 145-201

15
16
18
20
20